

# CP Theory I

CPの破れの大きさは予言可能か？

Morimitsu Tanimoto

Niigata University

第31回ニュートリノ研究会

February 24, 2018

ICRR, Kashiwa

# I Introduction

CP対称性の破れは、K中間子(1964)とB中間子(2001)の系で確立されている。

これらはクォークセクターにおけるSMの物理である。

1967年 (3 years after the discovery of CP violation in  $K_L \rightarrow 2\pi$ ), Sakharovは宇宙のバリオン非対称(baryon asymmetry in the universe **BAU**)の生成をダイナミカルに実現する条件を示した。

## Three necessary ingredients

- (i) Baryon number violation
- (ii) **C and CP violation**
- (iii) Departure from thermal equilibrium

**CP 対称性は素粒子の基本的な対称性である。(粒子-反粒子対称性)**

★CPの破れ方? Spontaneously or explicitly?

★宇宙のバリオン非対称を生成するCPの破れの起源は何か?

Quark sector ? Lepton sector ? Others (New Physics) ?

T2K と Nova の実験結果では ニュートリノ振動におけるCP対称性の破れの強い示唆がある。これが確証されれば新たなCP violationのソースが確立する。

$$\delta_{CP}^{MNS} \sim -90^\circ ?$$

$$\delta_{CP}^{CKM} = 73.2^\circ \begin{matrix} +6.3^\circ \\ -7.0^\circ \end{matrix}$$

PDG parametrization of CKM and MNS matrices

$$\begin{pmatrix} C_{12}C_{13} & S_{12}C_{13} & S_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ -S_{12}C_{23} - C_{12}S_{23}S_{13}e^{i\delta_{CP}} & C_{12}C_{23} - S_{12}S_{23}S_{13}e^{i\delta_{CP}} & S_{23}C_{13} \\ S_{12}S_{23} - C_{12}C_{23}S_{13}e^{i\delta_{CP}} & -C_{12}S_{23} - S_{12}C_{23}S_{13}e^{i\delta_{CP}} & C_{23}C_{13} \end{pmatrix}$$

★ CPの破れの大きさは予言可能か？

★ クォークとニュートリノのCP位相に相関はあるか？

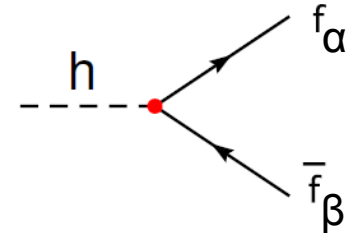
★ 宇宙のバリオン非対称再現のCPの破れの起源は何か？ 清水トーク

# Quark/Leptonの CP violating phase を予言するための枠組

Quark/Lepton mass matricesのフレーバー(世代)構造がわかればよい

Yukawa Interactions

Fermion(フレーバーの固有状態)とHiggsのCoupling



簡単な例: up quark mass matrixが対角化されたベースで  
down quark mass matrix は

Occam's Razor 1601.04459 TY for quarks  
1205.2198 HIY for neutrino

Weiberg Ansatz ( zero and  $a=a'$  )

$$M_d^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a' & b & e^{-i\phi} \\ 0 & c' & d \end{pmatrix}_{LR}$$

Zeros

7つのパラメータ

7つの実験値 (3 masses, 4 CKM elements)

$$V_{us} = \frac{ab}{m_s^2} \left| \sin \frac{\phi}{2} \right| \quad V_{cb} = \frac{\sqrt{2}c}{m_b} \left| \cos \frac{\phi}{2} \right| \quad V_{ub} = \frac{ac'}{m_b^2} \quad \delta_{cp} = \frac{1}{2}(\pi - \phi)$$

$\alpha(\Phi_2) \sim 90^\circ$ が予言される。Minimal schemeはある程度予言可能

有限な質量をもった3世代ニュートリノでOccam's Razor(最大限のパラメータ除去)を適用すると7つのパラメータでニュートリノ質量行列が書ける。 [arXiv:1604.03315](#)

$$m_D = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A' & 0 & B \\ 0 & B' & C \end{pmatrix}_{LR} \quad M_R = \begin{pmatrix} M_1 e^{-i\phi_A} & 0 & 0 \\ 0 & M_2 e^{-i\phi_B} & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix}_{RR} \quad M_E = \begin{pmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix}_{LR}$$

ニュートリノ質量行列にはCP位相が二つ残る。  
CPの破れの大きさの予言力は低下する。

予言力を上げるためには、以下の方法がある。

- 1 右巻きMajorana粒子を二つにしてパラメータを二つ減らす。
- 2 フレーバーの対称性を課して質量行列のフレーバー構造を縛る。

# $\nu_\mu$ Result

49



A. Radovic, JETP January 2018

- Full joint fit with appearance analysis. Feldman Cousins corrections in 2D & 1D limits.
- All systematics, oscillation pull terms shared.
- Constrain  $\theta_{13}$  using world average from PDG,  $\sin^2 2\theta_{13} = 0.082$

NOvA Preliminary

**Best fit:**

$$\Delta m_{32}^2 =$$

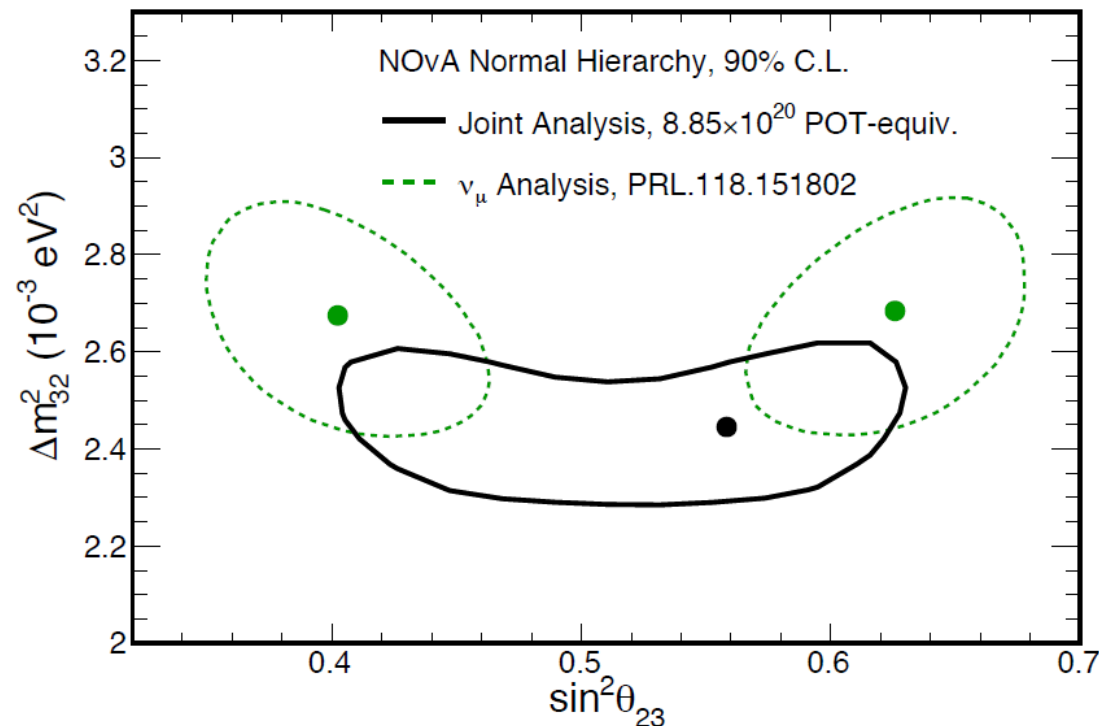
$$2.444^{+0.079}_{-0.077} \times 10^{-3} \text{ eV}^2$$

UO preferred at  $0.2\sigma$

$$\sin^2 \theta_{23} =$$

$$\text{UO: } 0.558^{+0.041}_{-0.033}$$

$$\text{LO: } 0.475^{+0.036}_{-0.044}$$



# Atmospheric Mixing and World Constraints

54



A. Radovic, JETP January 2018

- Consistent with world expectation.
- Competitive measurement of  $\Delta m^2_{32}$ .

**Best fit:**

$$\Delta m^2_{32} =$$

$$2.444^{+0.079}_{-0.077} \times 10^{-3} \text{ eV}^2$$

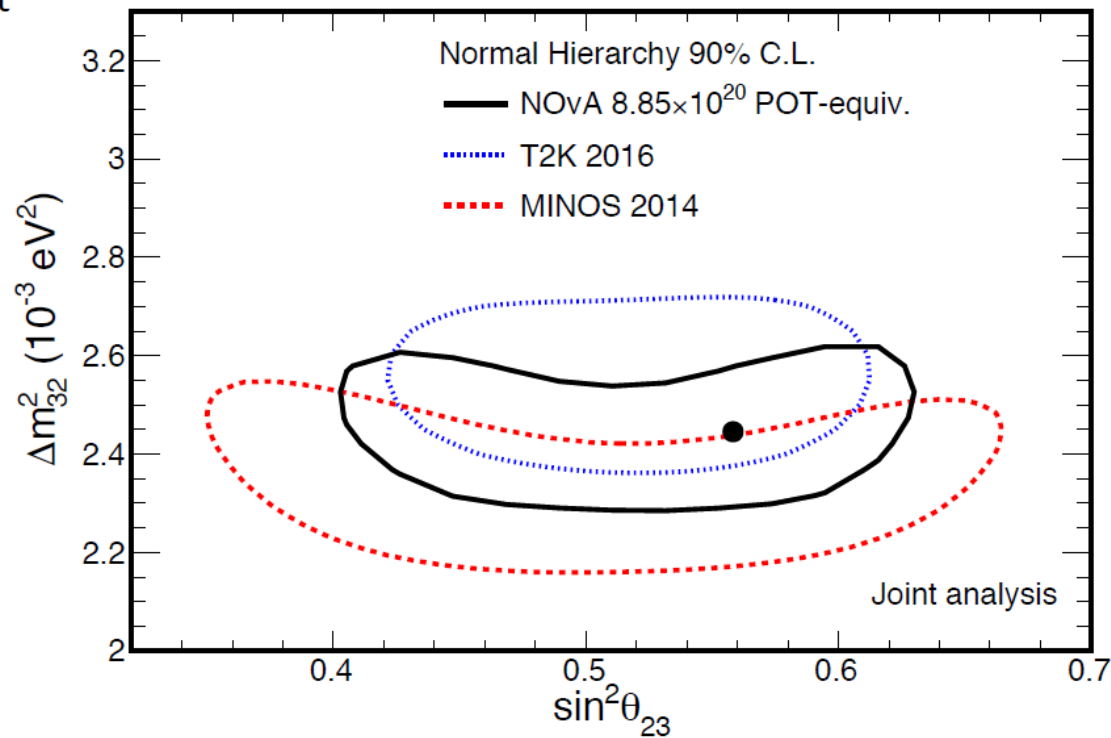
UO preferred at  $0.2\sigma$

$$\sin^2\theta_{23} =$$

$$\text{UO: } 0.558^{+0.041}_{-0.033}$$

$$\text{LO: } 0.475^{+0.036}_{-0.044}$$

NOvA Preliminary



# Interpretation/Precision of Atmospheric Angle

- ❖ if  $\theta_{23} = 41.6^\circ$ : model predicting this value or perturbed model with  $45.0^\circ - 3.4^\circ$ ?
  - far away from  $45^\circ$  could be related to  $(m_2/m_3)^{1/2}$  similar to GST **Cabibbo Angle**  $\sqrt{m_d / m_s}$
- ❖ BUT: the closer  $\theta_{23}$  to  $45^\circ$  the more likely that some symmetry / structure behind it... **離散群のもつ対称性**

**Werner Rodejohann (MPIK)**  
**29.01.2018 Neutrino Platform@CERN**



# フレーバー対称性（制限のきつい枠組み）

クォーク・レプトンのフレーバー構造に対称性があるか？

3世代  $\Rightarrow$  Triplet (e,  $\mu$ ,  $\tau$ )<sub>L</sub>

Non-Abelian Discrete Symmetry

一方 CP symmetry も Discrete Symmetry

フレーバーの離散対称性とCP対称性は起源が同じかもしれない。

The discrete symmetries are described by finite group  $G$ , which consists of a finite number of element (order).

$S_3$  has 6 elements (order 6): minimal non-Abelian discrete symmetry.

irreducible representations: 1, 1', 2, no triplet representation.

Non-Abelian Finite groups with triplet representation are often used for the flavor symmetry.

$S_4$ ,  $A_4$ ,  $A_5$  .....

Ishimori, Kobayashi, Ohki, Shimizu, Okada, M.T, PTP supplement, 183,2010,arXiv1003.3552,  
Lect. Notes Physics (Springer) 858,2012

## 2 Challenge to predict CP violation

### 2.1 Towards non-Abelian Discrete flavor symmetry

#### クォーク セクター

1998年以前はレプトンにはフレーバー混合の情報は無かった。

Discrete Symmetry and Cabibbo Angle,  
Phys. Lett. 73B (1978) 61, S.Pakvasa and H.Sugawara

$S_3$  symmetry is assumed for the Higgs interaction with the quarks and the leptons for the self-coupling of the Higgs bosons.

二世代の  
枠組み

$$\begin{array}{ccc} S_3 \text{ doublet} & S_3 \text{ singlets} & S_3 \text{ doublet} \\ \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ n_1 \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} p_2 \\ n_2 \end{pmatrix}_L \right\} & \{p_{1R}\}, \{p_{2R}\}, \{n_{1R}, n_{2R}\} & \rightarrow \tan \theta_c = m_d/m_s. \\ \text{one } S_3 \text{ singlet } \{\phi_0\} \text{ and one } S_3 \text{ doublet } \{\phi_1, \phi_2\} & & \end{array}$$

# 三世代の枠組み

A Geometry of the generations, Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 3985  
L.J.Hall and H.Murayama

$(S(3))^3$  flavor symmetry for quarks Q, U, D

$(S(3))^3$  flavor symmetry and  $p \rightarrow K^0 e^+$ , (SUSY version)  
Phys. Rev.D 53 (1996) 6282, C.D.Carone, L.J.Hall and H.Murayama

fundamental sources of flavor symmetry breaking are gauge singlet fields  $\phi$ : flavons  
Incorporating (charged) lepton flavor based on the discrete flavor group  $(S_3)^3$ .

1998年以降、ニュートリノ振動実験でフレーバー混合が確定されてきた。  
しかし、2012年までは  $\theta_{13}$  ( $\nu_e \nu_\tau$ ) は測定されていなかった。

$$\sin^2 \theta_{12} \sim 1/3, \sin^2 \theta_{23} \sim 1/2$$

Harrison, Perkins, Scott (2002) の提案

## Tri-bimaximal Mixing of Neutrino flavors

$$\sin^2 \theta_{12} = 1/3, \sin^2 \theta_{23} = 1/2, \sin^2 \theta_{13} = 0,$$

$$U_{\text{tri-bimaximal}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} & \sqrt{1/3} & 0 \\ -\sqrt{1/6} & \sqrt{1/3} & -\sqrt{1/2} \\ -\sqrt{1/6} & \sqrt{1/3} & \sqrt{1/2} \end{pmatrix}$$

Tri-bimaximal Mixing (TBM) は以下の質量行列から導かれる。

$$m_{TBM} = \frac{m_1 + m_3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{m_2 - m_1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{m_1 - m_3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

charged lepton 質量行列は対角化されているベース。

$A_4$  symmetric

under the assignment of  $A_4$  triplet 3 for  $(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)_L$

# 2012年

$\theta_{13}$  (Ue3) は Daya Bay, RENO, Double Chooz, T2K, MINOSによって測定された。 ,

$$\theta_{13} \simeq 9^\circ \simeq \theta_c / \sqrt{2} \quad \text{ゼロから大きくずれている！}$$

Tri-bimaximal mixing ではない！

この大きな  $\theta_{13}$  は CP violation が近い将来測定可能であることを示唆していた。なぜなら CPの指標  $J_{CP}$  は

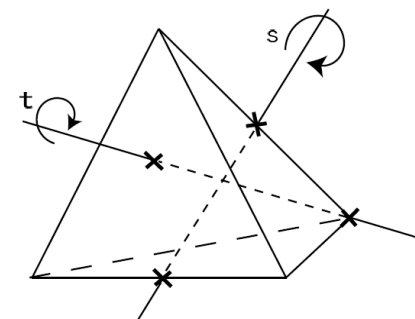
$$J_{CP} = s_{23}c_{23}s_{12}c_{12}s_{13}c_{13}^2 \sin \delta_{CP} \simeq 0.0327 \sin \delta$$

$$J_{CP}(\text{quark}) \sim 3 \times 10^{-5}$$

この頃からCP 位相の大きさを予言しようとする理論研究が盛んになった。

# $A_4$ group

Even permutation group of four objects (1234)  
 12 elements (order 12) are generated by  
 $S$  and  $T$ :  $S^2=T^3=(ST)^3=1$  :  $S=(14)(23)$ ,  $T=(123)$



Symmetry of tetrahedron

## 4 conjugacy classes

$C_1$ : 1  $h=1$   
 $C_3$ :  $S, T^2ST, TST^2$   $h=2$   
 $C_4$ :  $T, ST, TS, STS$   $h=3$   
 $C_4'$ :  $T^2, ST^2, T^2S, ST^2S$   $h=3$

	$h$	$\chi_1$	$\chi_{1'}$	$\chi_{1''}$	$\chi_3$
$C_1$	1	1	1	1	3
$C_3$	2	1	1	1	-1
$C_4$	3	1	$\omega$	$\omega^2$	0
$C_4'$	3	1	$\omega^2$	$\omega$	0

Irreducible representations: 1, 1', 1'', 3

The minimum group containing triplet without doublet.

For triplet  $S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$ ;  $\omega = e^{2\pi i/3}$

# $S_4$ group

All permutations among four objects,  $4! = 24$  elements

24 elements are generated by  $S, T$  and  $U$ :

$$S^2 = T^3 = U^2 = 1, \quad ST^3 = (SU)^2 = (TU)^2 = (STU)^4 = 1$$

5 conjugacy classes

$C_1$ : 1

$h=1$

$C_3$ :  $S, T^2ST, TST^2$

$h=2$

$C_6$ :  $U, TU, SU, T^2U, STSU, ST^2SU$

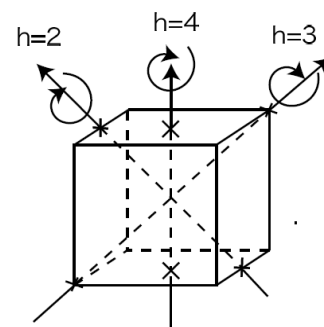
$h=2$

$C_6'$ :  $STU, TSU, T^2SU, ST^2U, TST^2U, T^2STU$

$h=4$

$C_8$ :  $T, ST, TS, STS, T^2, ST^2, T^2S, ST^2S$

$h=3$



Symmetry of a cube

Irreducible representations:

$1, 1', 2, 3, 3'$

	$h$	$\chi_1$	$\chi_{1'}$	$\chi_2$	$\chi_3$	$\chi_{3'}$
$C_1$	1	1	1	2	3	3
$C_3$	2	1	1	2	-1	-1
$C_6$	2	1	-1	0	1	-1
$C_6'$	4	1	-1	0	-1	1
$C_8$	3	1	1	-1	0	0

For triplet  $3$  and  $3'$

$$U = \mp \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}; \quad \omega = e^{2\pi i/3}$$

## 2.2 Direct approach of Flavor Symmetry

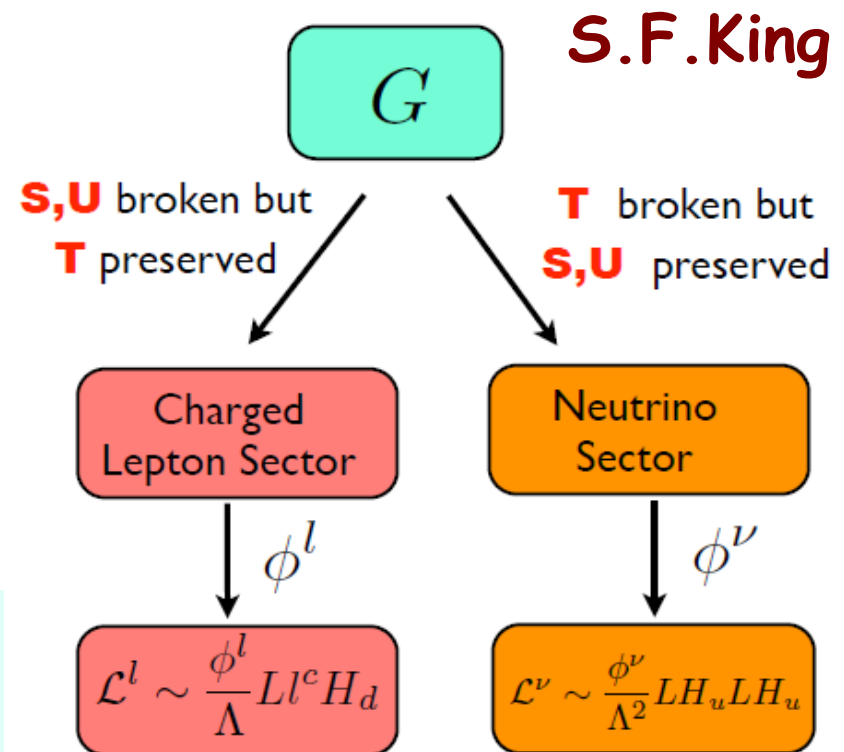
フレーバー対称性がニュートリノ混合の大きさを決めることが見た目ですぐわかるアプローチ

はじめに、高エネルギー側でフレーバー対称性の群  $G$  を想定する。

低エネルギー側で group  $G$  はニュートリノセクターと荷電レプトンセクターとで異なった subgroup に破れるとする。

$S, T, U$  are generators of Finite groups

### Direct Approach





## $S_4$ フレーバー対称性を考える:

24 個の元は  $S, T$  and  $U$  で生成される。

$$S^2=T^3=U^2=1, \quad ST^3 = (SU)^2 = (TU)^2 = (STU)^4 = 1$$

規約表現は :  $1, 1', 2, 3, 3'$

その部分群 : nine  $Z_2$ , four  $Z_3$ , three  $Z_4$ , four  $Z_2 \times Z_2$  ( $K_4$ )

$S_4$  が自発的に部分群に破れるとする。たとえば、

Neutrino sector  $(1, S, U, SU)$  ( $K_4$ )

Charged lepton sector  $(1, T, T^2)$  ( $Z_3$ )

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}; \quad \omega = e^{2\pi i/3}$$

ここで  $3$  と  $3'$  の  
場合、 $S, T, U$  の表現は

$$U = \mp \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ニュートリノと荷電レプトンの質量行列は以下の変換に対し不変

$$S^T m_{LL}^\nu S = m_{LL}^\nu, \quad U^T m_{LL}^\nu U = m_{LL}^\nu, \quad T^\dagger Y_e Y_e^\dagger T = Y_e Y_e^\dagger$$



$$[S, m_{LL}^\nu] = 0, \quad [U, m_{LL}^\nu] = 0, \quad [T, Y_e Y_e^\dagger] = 0$$

○ 質量行列を対角化する混合行列は、 $S$  と  $U$ , または  $T$  も対角化する。

○  $T$  は対角化行列なので、荷電レプトンは対角化されたベースになっている。

$$V_\nu = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Tri-bimaximal mixing  $\theta_{13}=0$

C.S.Lam, PRD98(2008)  
arXiv:0809.1185

これは  $S$  と  $U$  を同時に対角化する直交行列である。

質量固有値とは無関係に決まる。

ニュートリノ質量行列のフレーバー構造は、残った対称性の Generators の構造を反映している。

もし、 $S_4$  が別の部分群に自発的に破れると、たとえば、

Neutrino  $(1, SU) (Z_2)$

Charged lepton  $(1, T, T^2) (Z_3)$

混合行列は変わる。

$$(SU)^T m_{LL}^\nu SU = m_{LL}^\nu, \quad T^\dagger Y_e Y_e^\dagger T = Y_e Y_e^\dagger$$



$$[SU, m_{LL}^\nu] = 0, \quad [T, Y_e Y_e^\dagger] = 0$$

Tri-maximal mixing

$TM_1$

$$V_\nu = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & c/\sqrt{3} & s/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & c/\sqrt{3} - s/\sqrt{2} & -s/\sqrt{3} - c/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & c/\sqrt{3} + s/\sqrt{2} & -s/\sqrt{3} + c/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$c = \cos \theta, \quad s = \sin \theta \quad \text{includes CP phase.}$$

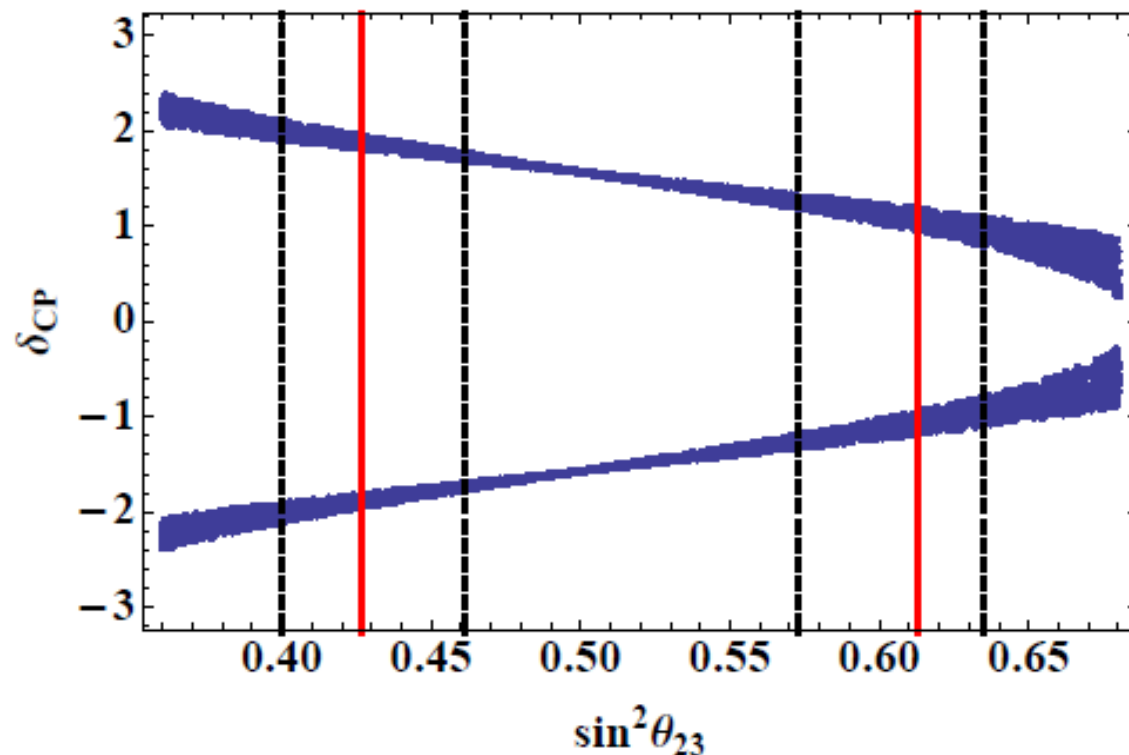
$SU$  はrank2の行列なので、 $\Theta$  は対称性では決まらない。

Mixing  
sum rules

$$\sin^2 \theta_{12} = 1 - \frac{2}{3} \frac{1}{\cos^2 \theta_{13}} \leq \frac{1}{3}, \quad \cos \delta_{CP} \tan 2\theta_{23} \simeq -\frac{1}{2\sqrt{2} \sin \theta_{13}} \left( 1 - \frac{7}{2} \sin^2 \theta_{13} \right)$$

3つの混合角の実験データをインプットするとMixing sum rulesは $\delta_{CP}$ を预言する。

Shimizu, Tanimoto, Yamamoto, arXiv:1405.1521



$\delta_{CP}$ の符号は  
決まらない。

$$\sin^2 \theta_{12} = 1 - \frac{2}{3} \frac{1}{\cos^2 \theta_{13}} \leq \frac{1}{3}, \quad \cos \delta_{CP} \tan 2\theta_{23} \simeq -\frac{1}{2\sqrt{2} \sin \theta_{13}} \left( 1 - \frac{7}{2} \sin^2 \theta_{13} \right)$$

## 2.3 CP symmetry and Flavor Symmetry

レプトンフレーバに対して $A_4$ 対称性を課す

$$|3\rangle = \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} \xrightarrow{A_4 \text{ 変換}} T \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}, \quad S \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}$$

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}; \quad \omega = e^{2\pi i/3}$$

$$\begin{pmatrix} e^* \\ \mu^* \\ \tau^* \end{pmatrix} \Rightarrow S \begin{pmatrix} e^* \\ \mu^* \\ \tau^* \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} e^* \\ \mu^* \\ \tau^* \end{pmatrix} \Rightarrow T^* \begin{pmatrix} e^* \\ \mu^* \\ \tau^* \end{pmatrix} = T^2 \begin{pmatrix} e^* \\ \mu^* \\ \tau^* \end{pmatrix}$$

CP 変換とは  $(S, T) \Rightarrow (S, T^2)$  の変換である

$\text{Out}(A_4) = Z_2$  outer automorphism 外部自己同型

別の理解

$$|3^*\rangle \equiv \begin{pmatrix} e^* \\ \tau^* \\ \mu^* \end{pmatrix}; \quad |3^*\rangle \Rightarrow T |3^*\rangle$$

$S_4$  groupでは可能!

4 conjugacy classes (共役類)

C1: 1  $h=1$

C3: S,  $T^2ST$ ,  $TST^2$   $h=2$

C4: T, ST, TS, STS  $h=3$

C4':  $T^2$ ,  $ST^2$ ,  $T^2S$ ,  $ST^2S$   $h=3$

## Generalized CP Symmetry (フレーバー空間の回転を含む)

**CP Symmetry**  $\varphi(x) \xrightarrow{\mathbf{CP}} X_{\mathbf{r}} \varphi^*(x'), \quad x' = (t, -\mathbf{x})$

**Flavor Symmetry**  $\varphi(x) \xrightarrow{\mathbf{g}} \rho_{\mathbf{r}}(g) \varphi(x), \quad g \in G_f$

- 採用する有限群によっては CP Symmetryを定義できないことがある！
- その場合は、フレーバー対称性をLagrangianに課したとたん、CPは破れる。  
これはexplicit CP violationであり、その原因はフレーバー対称性である。
- このときCPの破れの大きさは予言できない。

Chen, et al: arXiv 1402.0507

**CP 対称性を許さない有限群**  $\Delta(27), T_7, \dots$  **Explicit CP violation**  
**群論による考察**  
 class-inverting automorphism

**CP 対称性を許す有限群**  $A_4, A_5, T', \dots$  **non-trivial CP 変換**  
 $S_3, S_4, \dots$  **trivial CP変換が存在**

**Spontaneous CP violation**  
 CPの破れの大きさは予言可能

高エネルギー側でフレーバー対称性と  
CP対称性を含む有限群を考える。

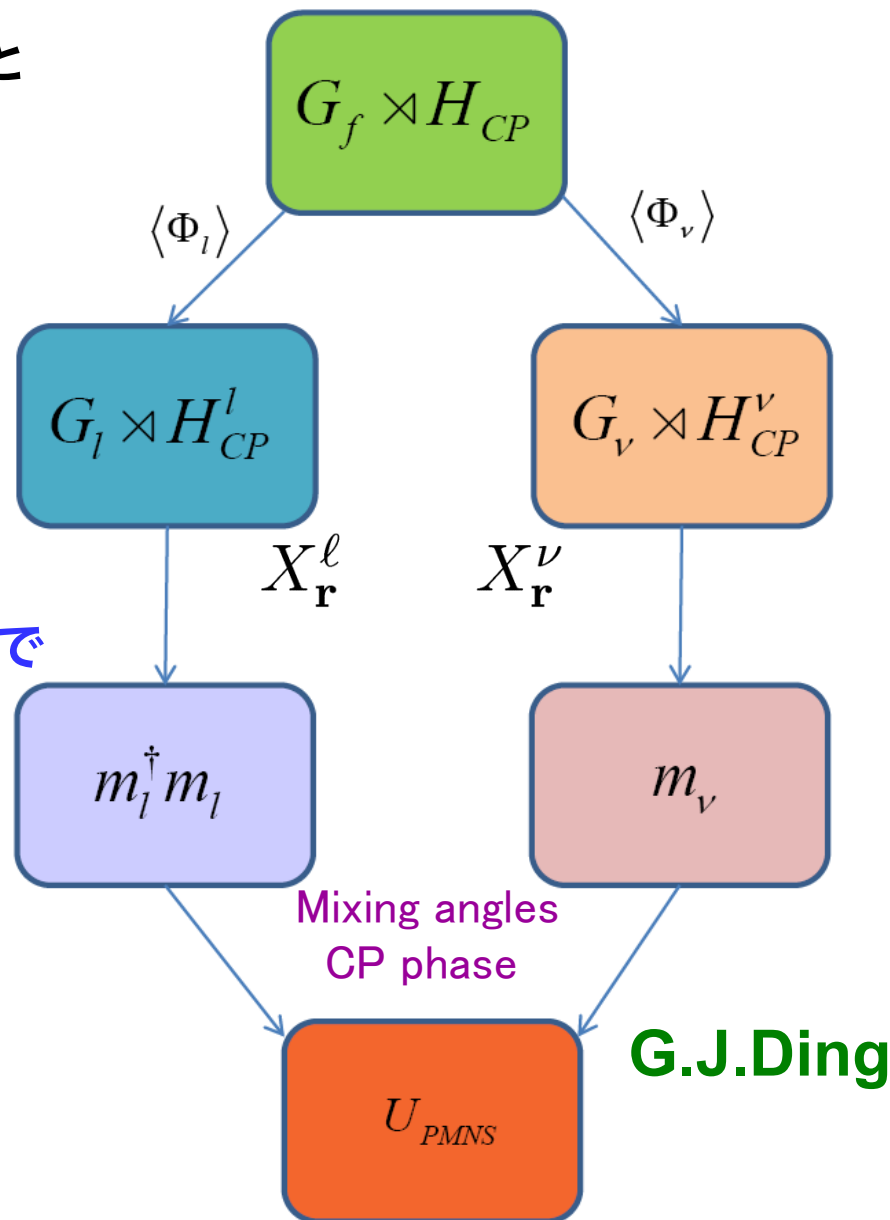
$$G_{CP} = G_f \rtimes H_{CP}$$

これは低エネルギー側で  
ニュートリノと荷電レプトン  
で異なった部分群に破れるとする。

相互作用がCP変換に対して不変なので  
その変換  $X$  は以下の条件を満たす。

$$X_{\mathbf{r}}^{\nu T} m_{\nu LL} X_{\mathbf{r}}^{\nu} = m_{\nu LL}^*$$

$$X_{\mathbf{r}}^{\ell \dagger} (m_{\ell}^{\dagger} m_{\ell}) X_{\mathbf{r}}^{\ell} = (m_{\ell}^{\dagger} m_{\ell})^*$$



# Generalized CP Symmetry

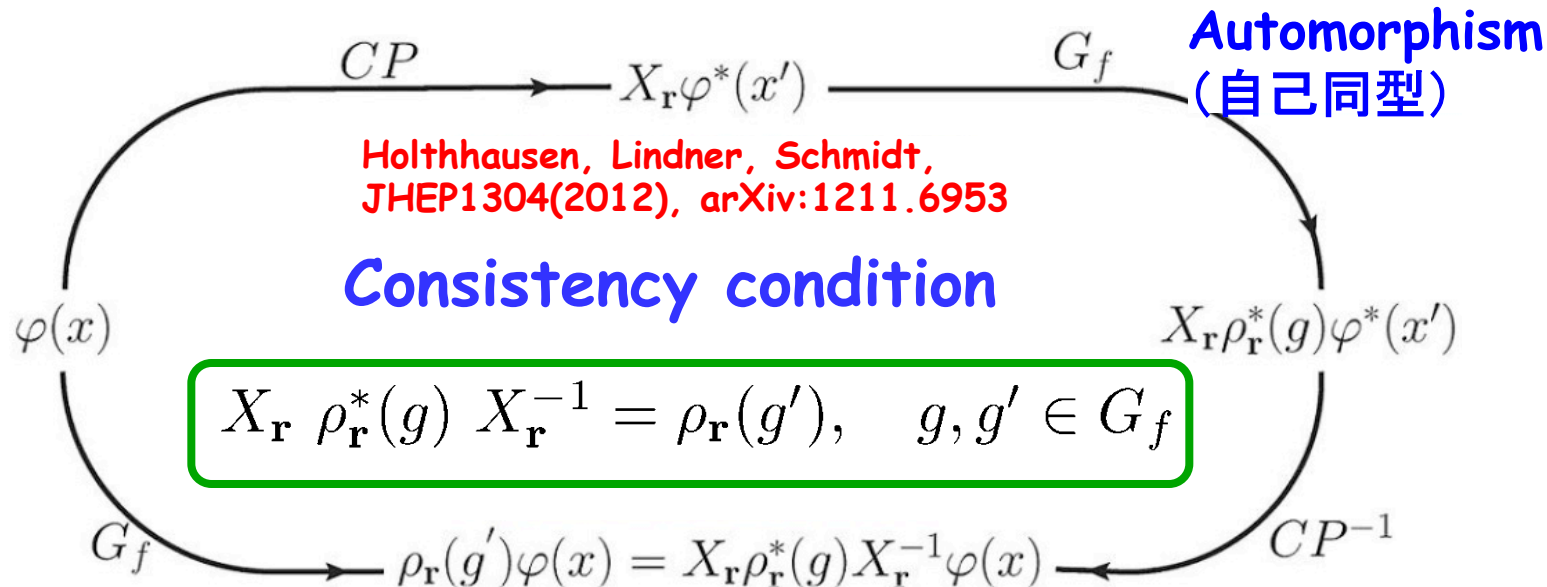
**CP Symmetry**  $\varphi(x) \xrightarrow{\text{CP}} X_{\mathbf{r}} \varphi^*(x'), \quad x' = (t, -\mathbf{x})$

$$X_{\mathbf{r}}^{\nu T} m_{\nu LL} X_{\mathbf{r}}^{\nu} = m_{\nu LL}^*$$

**Flavour Symmetry**  $\varphi(x) \xrightarrow{g} \rho_{\mathbf{r}}(g) \varphi(x), \quad g \in G_f$

$$X_{\mathbf{r}}^{\ell \dagger} (m_{\ell}^{\dagger} m_{\ell}) X_{\mathbf{r}}^{\ell} = (m_{\ell}^{\dagger} m_{\ell})^*$$

$X_{\mathbf{r}}$  はフレーバー変換  $\rho_{\mathbf{r}}(g)$  と矛盾なく選ばれる必要がある。





# An example of $S_4$ model

Ding, King, Luhn, Stuart, JHEP1305(2013)084, arXiv:1303.6180

$S_4$ フレーバー対称性が破れニュートリノに  $G_\nu=\{1, S\}$  ( $Z_2$ 対称性),  
荷電レプトンに  $G_e=\{1, T, T^2\}$  ( $Z_3$ 対称性) だけが残り、  
CP対称性が破れ  $X_3^\nu=\{U\}$ ,  $X_3^l=\{1\}$  が残るとする。

これらは  $X_r \rho_r^*(g) X_r^{-1} = \rho_r(g')$ ,  $g, g' \in G_f$  の条件を満たす。

$G_\nu=\{S\}$ 対称性をもつ ( $S$ と交換可能な) ニュートリノ質量行列は

$$m_{\nu LL} = \alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CP symmetry



$$X_r^{\nu T} m_{\nu LL} X_r^\nu = m_{\nu LL}^*$$

$\alpha, \beta, \gamma$  are real,  $\epsilon$  is imaginary.

$A_4$  model では実現しない !

$$V_\nu = \begin{pmatrix} 2c/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 2s/\sqrt{6} \\ -c/\sqrt{6} + is/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -s/\sqrt{6} - ic/\sqrt{2} \\ -c/\sqrt{6} + is/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -s/\sqrt{6} + ic/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$c = \cos \theta, \quad s = \sin \theta$$



$$\sin^2 \theta_{13} = \frac{2}{3} \sin^2 \theta, \quad \sin^2 \theta_{12} = \frac{1}{2 + \cos 2\theta}, \quad \boxed{\sin^2 \theta_{23} = \frac{1}{2}}$$

$$|\sin \delta_{CP}| = 1, \quad \sin \alpha_{21} = \sin \alpha_{31} = 0$$

$$\delta_{CP} = \pm \pi / 2$$

予言されるCP位相の大きさは、対称性が自発的に破れたのち残ったフレーバー対称性とCP対称性に依存する。  
その大きさは典型的には、 $0, \pi, \pm\pi/2$  である。

注) 群が大きくなると Irregularな値をとることもある。例： $\Delta(96)$

# 3 Summary and Prospect

## CPとフレーバー対称性のDirect Approach

- はじめに、高エネルギー側でフレーバーと CP を含む群を設定する。
- 低エネルギー側で対称性は自発的にやぶれ、部分群の対称性に落ちる。  
ニュートリノセクターと荷電レプトンセクターの部分群が異なったとき  
フレーバー混合角とCP位相 $\delta_{CP}$ は预言できる。

$$\sin \delta_{CP} = 0 \text{ or } 1 \text{ for } A_4, A_5, S_3, S_4, T' \dots$$

ニュートリノ質量行列のフレーバー構造は、残った対称性の Generators(S, T, U)の構造を反映している。

# Direct Approachの特徴

- ☆ 湯川相互作用のフレーバー構造を群の構造と結びつけることができる。  
すなわち予言が明確である。
- ★ 他の現象と直接関連がつかない。(Lagrangianがかけない。)  
Leptogenesis, Quark CP violation, Lepton flavor violation

# Indirect Approachへ

- ☆ Dynamicsを議論するため **flavons (gauge singlet scalars)** を導入し、Lagrangianを与える。それによりフレーバー対称性を自発的に破る。  
真空の構造により、群Gがどの部分群に壊れるかを見ることができる。
- ★ パラメータの数(湯川相互作用)が多くなり、予言力が低下する。

# Indirect Approachの概略

- フレーバー対称性の役割は **Leptons**と**Flavons**の結合を決めることである。
- **Flavons**の特別な(残留部分群で許される)真空期待値 **vacuum alignments** が、湯川相互作用(質量行列)のフレーバー構造を決定する。

## A<sub>4</sub> モデルでの典型例

	Leptons	Flavons	
A <sub>4</sub> triplets	$(L_e, L_\mu, L_\tau)$	$\phi_\nu (\phi_{\nu 1}, \phi_{\nu 2}, \phi_{\nu 3})$ $\phi_E (\phi_{E 1}, \phi_{E 2}, \phi_{E 3})$	couple to neutrino sector  couple to charged lepton sector
A <sub>4</sub> singlets	$e_R : \mathbf{1} \quad \mu_R : \mathbf{1}'' \quad \tau_R : \mathbf{1}'$		

A<sub>4</sub> 不変なLagrangianを構成する。

$$\mathcal{L}_\ell = y^e e^c l \phi_l h_d / \Lambda + y^\mu \mu^c l \phi_l h_d / \Lambda + y^\tau \tau^c l \phi_l h_d / \Lambda$$

$$+ (y_{\phi_\nu}^\nu \phi_\nu + y_\xi^\nu \xi + y_{\xi'}^\nu \xi') l l h_u h_u / \Lambda^2 ,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{3}_L \times \mathbf{3}_L \times \mathbf{3}_{\text{flavon}} &\rightarrow \mathbf{1} \\ \mathbf{3}_L \times \mathbf{3}_L \times \mathbf{1}_{\text{flavon}}^{(\cdot)} &\rightarrow \mathbf{1} \\ \mathbf{3}_L \times \mathbf{1}_R \times \mathbf{3}_{\text{flavon}} &\rightarrow \mathbf{1} \end{aligned}$$

フレーバー群  $G$  は Flavons の VEV で破れる。

$$\mathbf{3}_L \times \mathbf{3}_L \times \mathbf{3}_{\text{flavon}} \rightarrow \mathbf{1}$$

$$m_{\nu LL} \sim y \begin{pmatrix} 2\langle\phi_{\nu 1}\rangle & -\langle\phi_{\nu 3}\rangle & -\langle\phi_{\nu 2}\rangle \\ -\langle\phi_{\nu 3}\rangle & 2\langle\phi_{\nu 2}\rangle & -\langle\phi_{\nu 1}\rangle \\ -\langle\phi_{\nu 2}\rangle & -\langle\phi_{\nu 1}\rangle & 2\langle\phi_{\nu 3}\rangle \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{3}_L \times \mathbf{1}_R (\mathbf{1}_R', \mathbf{1}_R'') \times \mathbf{3}_{\text{flavon}} \rightarrow \mathbf{1}$$

$$m_E \sim \begin{pmatrix} y_e \langle\phi_{E1}\rangle & y_e \langle\phi_{E3}\rangle & y_e \langle\phi_{E2}\rangle \\ y_\mu \langle\phi_{E2}\rangle & y_\mu \langle\phi_{E1}\rangle & y_\mu \langle\phi_{E3}\rangle \\ y_\tau \langle\phi_{E3}\rangle & y_\tau \langle\phi_{E2}\rangle & y_\tau \langle\phi_{E1}\rangle \end{pmatrix}$$

ここで Vacuum Alignments は generator  $S$  または  $T$  の対称性を保持するとする。

$$\text{すなわち } \langle\phi_{\nu 1}\rangle = \langle\phi_{\nu 2}\rangle = \langle\phi_{\nu 3}\rangle, \quad \langle\phi_{E2}\rangle = \langle\phi_{E3}\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle\phi_{\nu}\rangle \sim (1, 1, 1)^T, \quad \langle\phi_E\rangle \sim (1, 0, 0)^T$$

部分群  $Z_2$

部分群  $Z_3$

$$S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

荷電レプトンの質量行列は  $m_E$  は対角化されている。ニュートリノ質量行列  $m_{\nu LL}$  は

$$m_{\nu LL} \sim 3y \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

二つの縮退した質量と一つの質量ゼロ  
のニュートリノ  $(0, 3y, 3y)$   
従ってニュートリノ混合は決まらない。

Rank 2 の行列

さらに  $A_4$  singlet  $\xi : \mathbf{1}$  を導入する。

$$\mathbf{3}_L \times \mathbf{3}_L \times \mathbf{1}_{\text{flavon}} \rightarrow \mathbf{1}$$

$$m_{\nu LL} \sim y_1 \begin{pmatrix} 2\langle\phi_{\nu 1}\rangle & -\langle\phi_{\nu 3}\rangle & -\langle\phi_{\nu 2}\rangle \\ -\langle\phi_{\nu 3}\rangle & 2\langle\phi_{\nu 2}\rangle & -\langle\phi_{\nu 1}\rangle \\ -\langle\phi_{\nu 2}\rangle & -\langle\phi_{\nu 1}\rangle & 2\langle\phi_{\nu 3}\rangle \end{pmatrix} + y_2 \langle\xi\rangle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle\phi_{\nu 1}\rangle = \langle\phi_{\nu 2}\rangle = \langle\phi_{\nu 3}\rangle$$

$$m_{\nu LL} = 3a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tri-bimaximal mixingを導く質量行列の構成が完了  $\theta_{13}=0$

$$m_{\nu} = 3a + b, \quad b, \quad 3a - b \Rightarrow m_{\nu_1} - m_{\nu_3} = 2m_{\nu_2}$$

Neutrino Mass Sum Ruleが得られる

真空期待値の構造は対称性の破れのあと残った対称性によって決まる。

## Vacuum Alignment

群のテンソル積のCG係数とVacuum Alignmentが質量行列のフレーバー構造を決定し、ニュートリノ混合角とCP位相を预言する。

Flavonsを導入したことによって、フレーバーのDynamicsと真空構造を議論できるようになる。

どこまで明瞭な预言力があるか ？

次のスピーカーへ



# Backup slides

# **$A_5$ group** (simple group)

The  $A_5$  group is isomorphic to the symmetry of a **regular icosahedron** and a **regular dodecahedron**.

60 elements are generated  **$S$**  and  **$T$** .

$$S^2 = (ST)^3 = 1 \text{ and } T^5 = 1$$

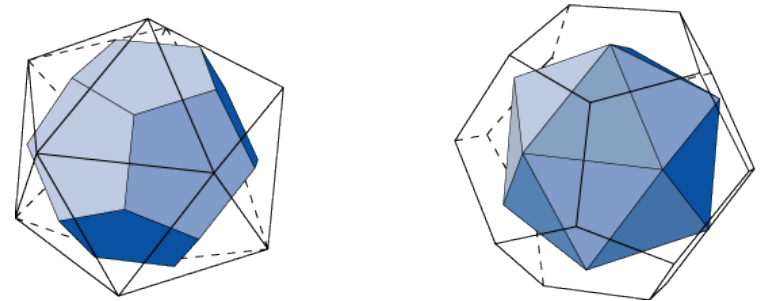
**5 conjugacy classes**

**Irreducible representations:**

**1, 3, 3', 4, 5**

**For triplet 3**

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\phi & \frac{1}{\phi} \\ \sqrt{2} & \frac{1}{\phi} & -\phi \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{5}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{8\pi i}{5}} \end{pmatrix}$$



	$h$	1	3	3'	4	5
$C_1$	1	1	3	3	4	5
$C_{15}$	2	1	-1	-1	0	1
$C_{20}$	3	1	0	0	1	-1
$C_{12}$	5	1	$\phi$	$1 - \phi$	-1	0
$C_{12'}$	5	1	$1 - \phi$	$\phi$	-1	0

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

**Golden Ratio**

# An example of $A_5$ model

Iura, Hagedorn, Meloni, JHEP1508(2015)037, arXiv:1503.04140

$A_5$ フレーバー対称性が破れニュートリノに  $G_\nu = \{ST^2ST\}$  ( $Z_2$ 対称性)  
荷電レプトンに  $G_e = \{T\}$  ( $Z_5$ 対称性) だけが残り、  
CP対称性が破れ  $X_3^v = \{X_0\}$ ,  $X_3^l = \{1\}$  が残るとする。

$$X\rho^*(g)X^{-1} = \rho(g')$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\phi & 1/\phi \\ \sqrt{2} & 1/\phi & -\phi \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\Phi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4i\Phi} \end{pmatrix} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \quad \text{黄金比}$$

$$\Phi = \frac{2\pi}{5}$$

$$\tan \varphi = 1/\phi$$

$$\mathbf{U}_{\text{MNS}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \cos \varphi & -\sqrt{2} \sin \varphi & 0 \\ -e^{-3i\Phi} \sin \varphi & e^{-3i\Phi} \cos \varphi & -e^{-7i\Phi/4} \\ -e^{-2i\Phi} \sin \varphi & e^{-2i\Phi} \cos \varphi & e^{-3i\Phi/4} \end{pmatrix} \mathbf{R}_{13}(\theta)$$

$$\sin^2 \theta_{12} = \frac{2}{2 + (3 + \sqrt{5}) \cos^2 \theta} \quad , \quad \sin^2 \theta_{13} = \frac{1}{10} (5 + \sqrt{5}) \sin^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta_{23} = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad |\sin \delta| = 1$$

## $A_4$ Model easily realizes non-vanishing $\theta_{13}$ .

Modify G. Altarelli, F. Feruglio, Nucl.Phys. B720 (2005) 64

	$(l_e, l_\mu, l_\tau)$	$e^c$	$\mu^c$	$\tau^c$	$h_{u,d}$	$\phi_l$	$\phi_\nu$	$\xi$	$\xi'$
$SU(2)$	2	1	1	1	2	1	1	1	1
$A_4$	3	1	$1''$	$1'$	1	3	3	1	$1'$
$Z_3$	$\omega$	$\omega^2$	$\omega^2$	$\omega^2$	1	1	$\omega$	$\omega$	$\omega$

Y. Simizu, M. Tanimoto, A. Watanabe, PTP 126, 81(2011)

$$\mathbf{3} \times \mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{1} = a_1 * b_1 + a_2 * b_3 + a_3 * b_2$$

$$\mathbf{3} \times \mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{1}' = a_1 * b_2 + a_2 * b_1 + a_3 * b_3$$

$$\mathbf{3} \times \mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{1}'' = a_1 * b_3 + a_2 * b_2 + a_3 * b_1$$

$\xi$

$$\mathbf{1} \times \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{1}$$

,

$\xi'$

$$\mathbf{1}'' \times \mathbf{1}' \Rightarrow \mathbf{1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Additional Matrix**

$$M_\nu = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

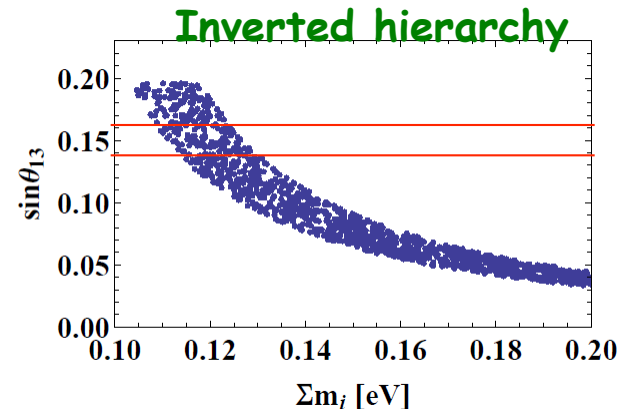
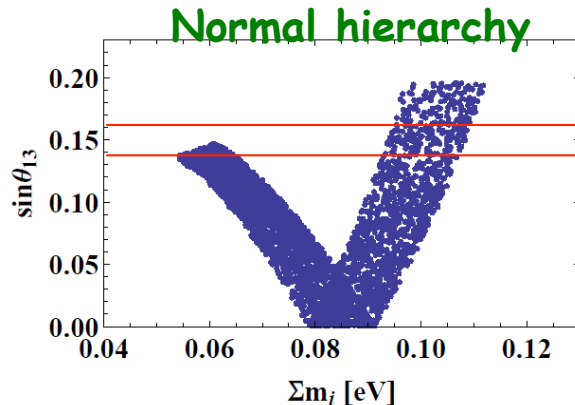
$$a = \frac{y_{\phi\nu}^\nu \alpha_\nu v_u^2}{\Lambda}, \quad b = -\frac{y_{\phi\nu}^\nu \alpha_\nu v_u^2}{3\Lambda}, \quad c = \frac{y_\xi^\nu \alpha_\xi v_u^2}{\Lambda}, \quad d = \frac{y_{\xi'}^\nu \alpha_{\xi'} v_u^2}{\Lambda} \quad a = -3b$$

Both normal and inverted mass hierarchies are possible.

$$M_\nu = V_{\text{tri-bi}} \begin{pmatrix} a + c - \frac{d}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}d \\ 0 & a + 3b + c + d & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}d & 0 & a - c + \frac{d}{2} \end{pmatrix} V_{\text{tri-bi}}^T$$

**Tri-maximal mixing: TM2**

$$\Delta m_{31}^2 = -4a\sqrt{c^2 + d^2 - cd}, \quad \Delta m_{21}^2 = (a + 3b + c + d)^2 - (a + \sqrt{c^2 + d^2 - cd})^2$$



# Consider the case of $A_4$ flavor symmetry:

$A_4$  has subgroups:

three  $Z_2$ , four  $Z_3$ , one  $Z_2 \times Z_2$  (klein four-group)

$$S^2 = T^3 = (ST)^3 = 1$$

$Z_2$ :  $\{1, S\}, \{1, T^2ST\}, \{1, TST^2\}$

$Z_3$ :  $\{1, T, T^2\}, \{1, ST, T^2S\}, \{1, TS, ST^2\}, \{1, STS, ST^2S\}$

$K_4$ :  $\{1, S, T^2ST, TST^2\}$

Suppose  $A_4$  is spontaneously broken to one of subgroups:

Neutrino sector preserves  $Z_2$ :  $\{1, S\}$

Charged lepton sector preserves  $Z_3$ :  $\{1, T, T^2\}$

$$S^T m_{LL}^\nu S = m_{LL}^\nu, \quad T^\dagger Y_e Y_e^\dagger T = Y_e Y_e^\dagger$$



$$[S, m_{LL}^\nu] = 0, \quad [T, Y_e Y_e^\dagger] = 0$$

Mixing matrices diagonalise  $m_{LL}^\nu$ ,  $Y_e Y_e^\dagger$  also diagonalize  $S$  and  $T$ , respectively !

Then, we obtain PMNS matrix.

$$V_\nu = \begin{pmatrix} 2c/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 2s/\sqrt{6} \\ -c/\sqrt{6} + s/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -s/\sqrt{6} - c/\sqrt{2} \\ -c/\sqrt{6} - s/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -s/\sqrt{6} + c/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$c = \cos \theta, \quad s = \sin \theta$

Tri-maximal mixing : so called  $TM_2$

$\Theta$  is not fixed.

Semi-direct model

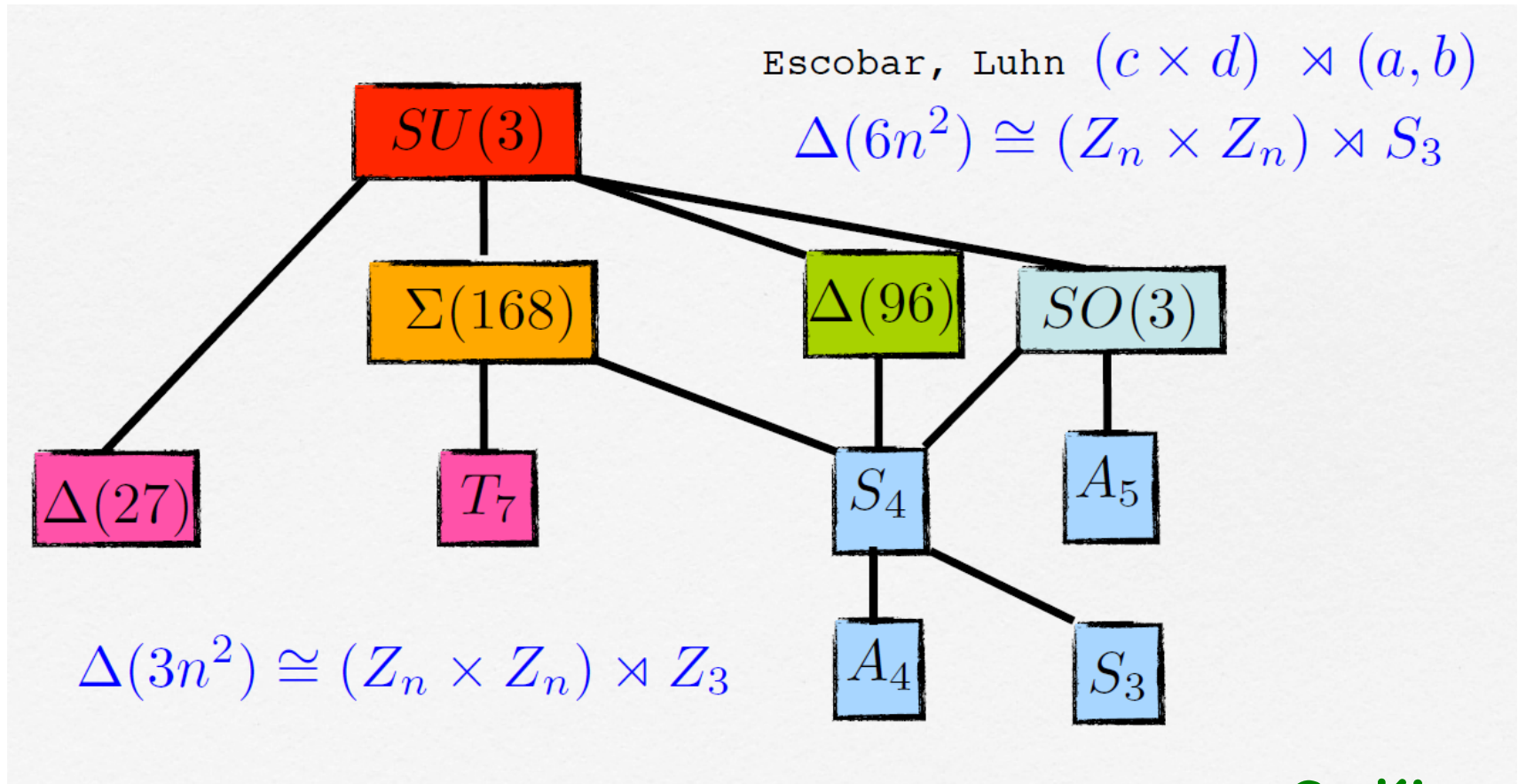
In general,  $s$  is complex.

CP symmetry can predict this phase as seen later.

another Mixing sum rules

$$\sin^2 \theta_{12} = \frac{1}{3} \frac{1}{\cos^2 \theta_{13}} \geq \frac{1}{3}, \quad \cos \delta_{CP} \tan 2\theta_{23} \simeq \frac{1}{\sqrt{2} \sin \theta_{13}} \left( 1 - \frac{5}{4} \sin^2 \theta_{13} \right)$$

Alternatively, discrete flavor symmetries may be originated from continuous symmetries



S. King



# CP対称性の破れの大きさ $\delta_{CP}$ を予言するためのヒント

Grimus, Lavoura arXiv: hep-ph/0305309

例: ニュートリノセクターに  
 $\mu$ - $\tau$  symmetry (離散対称性) がある場合  
荷電レプトンには $\mu$ - $\tau$  symmetryはない!  
このミスマッチより CP対称性は破れる

$$|U_{\mu i}| = |U_{\tau i}| \quad i = 1, 2, 3$$

すなわち

$$\cos \theta_{23} = \sin \theta_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sin \theta_{13} \cos \delta = 0$$

$$\delta = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{が 予言される。} \quad \text{なぜなら} \quad \theta_{13} \neq 0$$

対称性が自発的に破れ、その部分群の対称性が残っている場合  
その対称性の破れ方は予言できる。