

# 6.1-6.2 加速された荷電粒子による放射-Thomsonの議論

制動放射について考えたい

→ Maxwell方程式から議論するのが普通だが、Thomsonによる直観的な議論がある

図のABCDに着目して

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\Delta v t \sin \theta}{c \Delta t} \xrightarrow{\text{分母はクーロンの法則}} E_\theta = \frac{q(\Delta v / \Delta t) \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^2 r}$$

$$E_\theta = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}| \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^2 r}$$

ポインティングベクトルの導入

$$S = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = E^2 / Z_0, \text{ where } Z_0 = (\mu_0 / \epsilon_0)^{1/2}$$

Energy flow

$$S r^2 d\Omega = - \left( \frac{dE}{dt} \right) d\Omega = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 Z_0 \epsilon_0^2 c^4 r^2} r^2 d\Omega = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} d\Omega$$

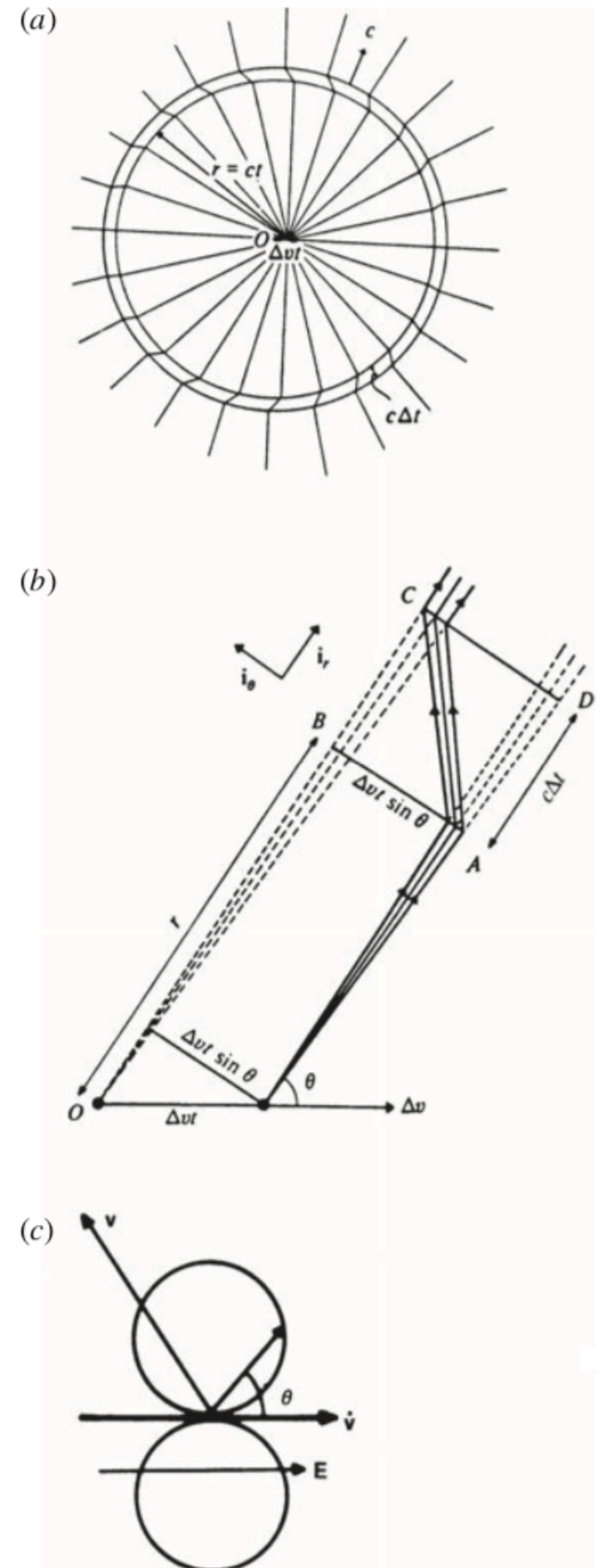
→ 全立体角で積分

$$- \left( \frac{dE}{dt} \right) = \int_0^\pi \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} 2\pi \sin \theta d\theta$$

→

$$- \left( \frac{dE}{dt} \right) = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{q^2 |\mathbf{a}|^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$

ラーモアの公式



### 6.2.3 加速された荷電粒子による放射-Maxwell方程式の立場から

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho_e / \epsilon_0. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi. \end{aligned}$$

Lorentzゲージでゲージ固定を行う

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J}, \\ \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho_e}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

第2項がなければポアソン方程式

これらの方程式を満たす解は？

$$\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0.$$

$\chi$ はゲージ変換のパラメータ

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r', \\ \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\rho_e(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \end{aligned}$$

遅延ポテンシャル

もし、点電荷が与えられた軌道を描いて走行しているのなら

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) d^3 r' = q \mathbf{v} \delta(\mathbf{r}), \text{ が言えて...}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 q \mathbf{v}}{4\pi r}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 q \ddot{\mathbf{r}}}{4\pi r} = -\frac{q \ddot{\mathbf{r}}}{4\pi \epsilon_0 c^2 r}.$$

ただしこの議論はデルタ関数の引数の処理に問題あり(?)

相対論的な領域の正しい解

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[ \frac{q \mathbf{v}}{1 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})/c} \right]_{\text{ret}}; \quad \phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r} \left[ \frac{q}{1 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})/c} \right]_{\text{ret}},$$

リエナール・ヴィーヘルトポテンシャル



## 6.2.4 相対論的な加速度を持つ荷電粒子のradiation loss

まずは粒子の4元加速度を導入(4元速度の固有時間による微分)

$$A = \gamma \left[ c \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial(\gamma \mathbf{v})}{\partial t} \right] = \left[ \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \right) \gamma^4 c, \gamma^2 \mathbf{a} + \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \right) \gamma^4 \mathbf{v} \right],$$

粒子の観測者の系Sから見た表式

S系とS'系(加速した粒子に対する瞬間的な慣性系)の間で、4元加速度の大きさを等式で繋げる

$$-a_0^2 = c^2 \gamma^8 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}/c^2)^2 - [\gamma^2 \mathbf{a} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}/c^2) \gamma^4 \mathbf{v}]^2.$$

S'系

S系

計算

$$\longrightarrow a_0^2 = \gamma^4 [\mathbf{a}^2 + \gamma^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})/c^2].$$

加速度を成分に分けると...

$$\mathbf{a} = a_{\parallel} \mathbf{i}_{\parallel} + a_{\perp} \mathbf{i}_{\perp} \quad \text{and} \quad |\mathbf{a}|^2 = |a_{\parallel}|^2 + |a_{\perp}|^2.$$

$$\longrightarrow \left( \frac{dE}{dt} \right)_S = \frac{q^2 \gamma^4}{6\pi \epsilon_0 c^3} (|a_{\perp}|^2 + \gamma^2 |a_{\parallel}|^2).$$

ラーモアの式に代入

$$\left( \frac{dE}{dt} \right)_S = \left( \frac{dE'}{dt'} \right)_{S'} = \frac{q^2 |\mathbf{a}_0|^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{q^2 \gamma^4}{6\pi \epsilon_0 c^3} \left[ \mathbf{a}^2 + \gamma^2 \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c} \right)^2 \right].$$

Lorentz inv.

## 6.2.5 Spectral distribution(フーリエ解析の立場から)

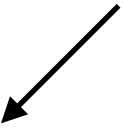
まずは粒子の4元加速度を導入(4元速度の固有時間による微分)

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{v}}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega ,$$

$$\dot{\mathbf{v}}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{v}}(t) \exp(i\omega t) dt .$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{\mathbf{v}}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{\mathbf{v}}(t)|^2 dt .$$

パーセバルの等式(証明は省略)


$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{dt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} |\dot{\mathbf{v}}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} |\dot{\mathbf{v}}(\omega)|^2 d\omega .$$

加速度は実数関数ゆえ

$$\int_0^{\infty} |\dot{\mathbf{v}}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^0 |\dot{\mathbf{v}}(\omega)|^2 d\omega , \text{ が成り立つ}$$

よってtotal emitted radiationは

$$\text{total emitted radiation} = \int_0^{\infty} I(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} \frac{e^2}{3\pi \epsilon_0 c^3} |\dot{\mathbf{v}}(\omega)|^2 d\omega .$$

---

## 6.3 制動放射について

$$\left. \begin{aligned} a_{\parallel} = \dot{v}_x &= -\frac{eE_x}{m_e} = \frac{\gamma Ze^2 vt}{4\pi\epsilon_0 m_e [b^2 + (\gamma vt)^2]^{3/2}}, \\ a_{\perp} = \dot{v}_z &= -\frac{eE_z}{m_e} = \frac{\gamma Ze^2 b}{4\pi\epsilon_0 m_e [b^2 + (\gamma vt)^2]^{3/2}}, \end{aligned} \right\}$$

フーリエ変換

$$\begin{aligned} \dot{v}_x(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma Ze^2 vt}{4\pi\epsilon_0 m_e [b^2 + (\gamma vt)^2]^{3/2}} \exp(i\omega t) dt, \\ \dot{v}_z(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma Ze^2 b}{4\pi\epsilon_0 m_e [b^2 + (\gamma vt)^2]^{3/2}} \exp(i\omega t) dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_x(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\gamma bv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} \exp\left(i\frac{\omega b}{\gamma v} x\right) dx, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\gamma bv} I_1(y), \end{aligned}$$

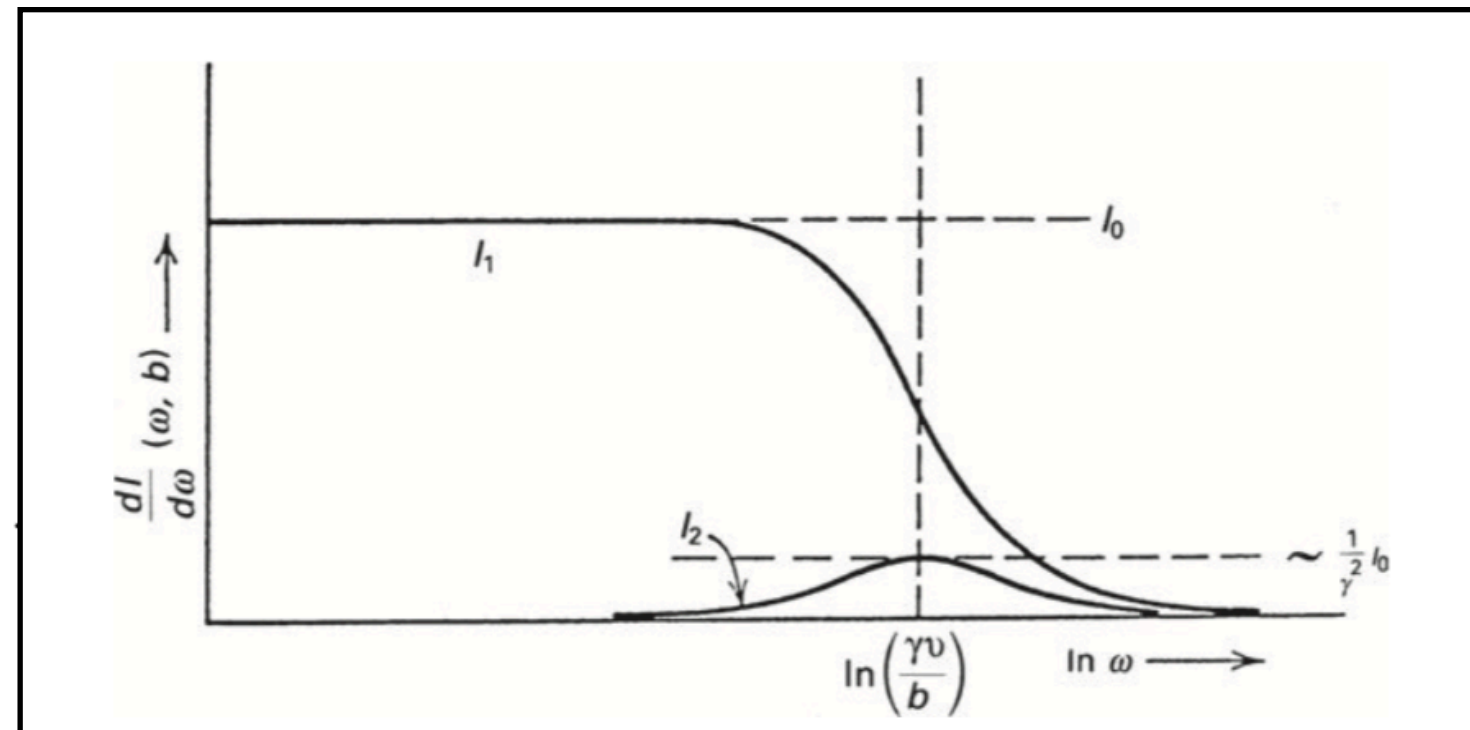
$$\begin{aligned} \dot{v}_z(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{1}{bv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \exp\left(i\frac{\omega b}{\gamma v} x\right) dx, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{1}{bv} I_2(y), \end{aligned}$$

Kはベッセル関数

$$I_1(y) = 2iyK_0(y) \quad I_2(y) = 2yK_1(y),$$

$$\begin{aligned} y \ll 1 \quad & K_0(y) = -\ln y; \quad K_1(y) = 1/y, \\ y \gg 1 \quad & K_0(y) = K_1(y) = (\pi/2y)^{1/2} \exp(-y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} [|\dot{a}_{\parallel}(\omega)|^2 + |\dot{a}_{\perp}(\omega)|^2], \\ &= \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e bv}\right)^2 \left[\frac{1}{\gamma^2} I_1^2(y) + I_2^2(y)\right], \\ &= \frac{Z^2 e^6}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v^2} \frac{\omega^2}{\gamma^2 v^2} \left[\frac{1}{\gamma^2} K_0^2\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) + K_1^2\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)\right] \end{aligned}$$



## 6.3 制動放射について

高周波において(ベッセル関数の漸近形から)

$$I(\omega) = \frac{Z^2 e^6}{48\pi^3 \varepsilon_0^3 c^3 m_e^2 v^2} \frac{\omega}{\gamma v b} \left[ \frac{1}{\gamma^2} + 1 \right] \exp\left(-\frac{2\omega b}{\gamma v}\right).$$

expによるcut-offがある

低周波において(ベッセル関数の漸近形から)

$$I(\omega) = \frac{Z^2 e^6}{24\pi^4 \varepsilon_0^3 c^3 m_e^2 v^2} \frac{1}{b^2} \left[ 1 + \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)^2 \ln^2\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) \right].$$

$$\xrightarrow{\omega b / \gamma v \ll 1}$$

$$I(\omega) = \frac{Z^2 e^6}{24\pi^4 \varepsilon_0^3 c^3 m_e^2 b^2 v^2} = K.$$

$\gamma$  因子が消える

$$y \ll 1 \quad K_0(y) = -\ln y; \quad K_1(y) = 1/y,$$

$$y \gg 1 \quad K_0(y) = K_1(y) = (\pi/2y)^{1/2} \exp(-y).$$

$$I(\omega') = \int_{b'_{\min}}^{b'_{\max}} 2\pi b' \gamma N v K db' = \frac{Z^2 e^6 \gamma N}{12\pi^3 \varepsilon_0^3 c^3 m_e^2 v} \frac{1}{v} \ln\left(\frac{b'_{\max}}{b'_{\min}}\right).$$

