

6 加速電子の放射と制動放射

6.1 導入

制動放射は自由-自由放射とも呼ばれる。制動放射は天体のあらゆる場所で起こっており、 $T \approx 10^4$ K のコンパクト領域における水素イオンの電波放射、X 線連星による $T \approx 10^7$ K の X 線放射、または銀河中心のガスによる拡散した X 線放射などが挙げられる。制動放射のメカニズムを学ぶことは大事であるが、それによるエネルギー損失のメカニズムを知ることも重要である。本節では、加速された荷電粒子による放射について、非相対論的な場合と相対論的な場合について考える。

6.2 加速電子の放射

Gould はエネルギーの時間変化 dE/dt について、異なる 2 つの慣性系 (S 系と S' 系) での変換を考えた。本節では加速された荷電粒子の静止系を S' 系とし、実験室系を S 系とする。

6.2.1 放射の不変性

時間 dt の間にエネルギー dE を放射したとする。このとき、4 元ベクトルと 4 元運動量はそれぞれ $(cdt, \mathbf{r})$, $(dE/c, \mathbf{p})$ と書ける。2 つの異なる慣性系において、時間変化もエネルギー変化も同様に変換されるべきであるから、その比 dE/dt も同様に変換される。 S' 系での 4 元ベクトルと 4 元運動量はそれぞれ $(cdt', \mathbf{0})$, $(dE'/c, \mathbf{0})$ と書け、ローレンツ逆変換を考えると

$$dE = \gamma dE' \quad (6.1)$$

$$dt = \gamma dt' \quad (6.2)$$

となる。よって、 S 系と S' 系でのエネルギー損失率について

$$\frac{dE'}{dt'} = \frac{dE}{dt} \quad (6.3)$$

の関係が成り立ち、2 つの異なる慣性系間でのエネルギー損失率の不変性が保たれる。

6.2.2 J.J トムソンの方法によるアプローチ

J.J. トムソンによる加速電子のエネルギー損失率の計算は、トムソン散乱 (X 線と電子の散乱) の導出過程で与えられた方法である。まず、 S 系において原点 O にいる電荷 q の荷電粒子が、時間 Δt の間に $\Delta \mathbf{v}$ の速度まで加速され、その後 t 秒間にわたり運動したとする。この瞬間の電気力線を図 1 のように描くことで、エネルギー損失率を求める。

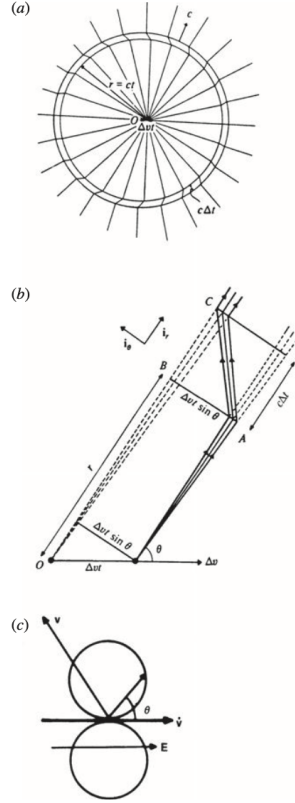


図 1: (a) JJ トムソンによる電気力線の考え方。 Δt の間に速度 Δv だけ上昇した時、加速の前後における電気力線の分布を示している。加速前と加速後には $c\Delta t$ の厚みの差があり、電気力線の滑らかな接続を行わなければならない。(b) 動径方向と角方向に対する電気力線の計算時のイメージ。(c) 加速された電子の双極子放射のイメージ。角方向の電場の大きさ E_θ は荷電粒子の加速方向と円弧との間の角 θ に依存する。正確には $\sin \theta$ に比例する。また、一般的に荷電粒子の運動方向と加速方向は一致する必要はない。例えば、ローレンツ力は粒子の進行方向と垂直に加速がかかる。

球の内外で考える。まず、球の外側ではそもそも情報が伝わらないため、電気力線の変動が見えない。一方、球の内部では運動する荷電粒子を中心として放射状に電気力線が分布する。 θ 方向に対して、単位面積あたりの電気力線の本数を与える。単位ベクトルを r 方向と θ 方向でそれぞれ $\mathbf{i}$, $\mathbf{i}_\theta$ とおく。 r 方向と θ 方向の電場の大きさをそれぞれ E_r , E_θ とおくと、その比は

$$E_r : E_\theta = c\Delta t : \Delta v t \sin \theta \quad (6.4)$$

より、

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{(\Delta v t) \sin \theta}{c\Delta t} \quad (6.5)$$

と書ける。 r 方向の電場はクーロンの法則によって与えられ、

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (6.6)$$

であるから、 θ 方向の電場の大きさは

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{(\Delta v t) \sin \theta}{c\Delta t} \\ &= \frac{(\Delta v / \Delta t) q \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \\ &= \frac{q |\mathbf{a}| \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \end{aligned} \quad (6.7)$$

と表せる。この式から、角方向の電場は荷電粒子の加速度の大きさに比例することが分かる。また、動径方向の電場は $1/r^2$ に比例するのに対し、角方向の電場は $1/r$ に比例する。そのため、電気力線の情報が伝播する（半径が大きくなる）に従い、角方向の電場が強くなっていき、電気力線は角方向に引き伸ばされる。

電気双極子モーメント $\mathbf{p}$ の二階微分は

$$\ddot{\mathbf{p}} = q\mathbf{a} \quad (6.8)$$

と書けるため、角方向の電場は

$$E_\theta = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}| \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \quad (6.9)$$

とも表せる。

単位時間あたりに単位面積を流れるエネルギー量はポインティングベクトル $\mathbf{S}$ の大きさとして表せる。ポインティングベクトルの大きさは

$$S = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = \frac{E^2}{Z_0} \quad (6.10)$$

と書ける。 Z_0 は真空のインピーダンスであり、

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

である。ポインティングベクトルと微小面積の積は単位時間あたりのエネルギー変化率を表す。ここで、微小面積 dS を微小立体角 $d\Omega$ を用いて表すと $r^2 d\Omega$ で書けるので、単位立体角あたりのエネルギー変化率を dE/dt として

$$Sr^2 d\Omega = - \left(\frac{dE}{dt} \right) d\Omega = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 Z_0 \epsilon_0^2 c^4 r^2} r^2 d\Omega \quad (6.11)$$

となる。ただし電場の大きさを計算する際、動径方向の電場の2乗は $1/r^4$ に比例するのに対し、角方向の値は $1/r^2$ に比例するため、動径方向の電場の大きさの2乗は角方向の電場の大きさの2乗に比べて十分小さいと考えることができる。よって、

$$E^2 = E_r^2 + E_\theta^2 \sim E_\theta^2 \quad (6.12)$$

と近似して計算を行なった。 $\epsilon_0^2 c^4 Z_0 = \epsilon_0 c^3$ を用いれば

$$Sr^2 d\Omega = - \left(\frac{dE}{dt} \right) d\Omega = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} d\Omega \quad (6.13)$$

と書ける。これを全立体角で積分すればトータルのエネルギー損失率が求められる。ただし、 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ および積分公式

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3} \quad (6.14)$$

を用いると、

$$- \left(\frac{dE}{dt} \right) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2 \sin^3 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} d\theta \quad (6.15)$$

$$= \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (6.16)$$

$$= \frac{q^2 |\ddot{\mathbf{a}}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (6.17)$$

となる。式 (6.17) は Larmor の式と呼ばれる。Larmor の式は、非相対論的な速度で運動する荷電粒子が加速を受けた際に放射されるエネルギーを表す式である。この式の重要な点は3つある。

1. エネルギー損失率は Larmor の式で与えられる。荷電粒子の加速は非相対論的なものであり、瞬間の粒子静止系でのエネルギー損失率を表す。
2. 加速度ベクトルと粒子の運動方向との間の角度を θ とする。このとき電場の大きさ E は $\sin \theta$ に比例し、ポインティングベクトルの大きさは $\sin^2 \theta$ に比例する。また放射は加速方向にはせず、場の強さは角度 θ で決まる。
3. 荷電粒子からの放射は、遠く離れた観測者からは偏極している。向きは $\mathbf{i}_\theta$ の向きである。

6.2.3 マクスウェル方程式からのアプローチ

真空中のマクスウェル方程式は以下で表せる。第一式はガウスの法則、第二式は磁場の湧き出しがないこと、第三式はファラデーの法則、第四式はアンペール・マクスウェルの方程式を表す。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (6.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.21)$$

電場と磁場の時間発展を簡単に記述すべく、マクスウェル方程式からベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ とスカラーポテンシャル ϕ を定義する。式 (6.19) よりベクトルポテンシャルが定義できて、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \\ \therefore \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \quad (6.22)$$

一方、式 (6.20) よりスカラーポテンシャルが定義できて、

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= \nabla \times (-\nabla \phi) = 0 \\ \therefore \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \end{aligned} \quad (6.23)$$

となる。式 (6.22) の rot をとると、

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.24)$$

となる。ここで、式 (6.21) を用いた。ベクトル解析の公式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (6.25)$$

を用いれば、

$$\begin{aligned} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} &= \mu_0 \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) \\ &= \mu_0 \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) \\ \therefore \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (6.26)$$

と整理できる。一方、式 (6.22) と式 (6.23) を式 (6.18) に代入すれば

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A})$$

が得られる。この両辺に $-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ を加えると

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (6.27)$$

と整理できる。式 (6.26) と (6.27) の右辺第 2 項の括弧内をゼロにすれば、 $\mathbf{A}$ と ϕ に関する波動方程式がそれぞれ得られる。ここで、括弧内をゼロにするための条件を考える。ベクトルポテンシャルをスカラー変数 χ を用いて

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \quad (6.28)$$

と変換する。電場と磁場はベクトルポテンシャルを用いて表せるため、この変換が磁場と電場に対して不変であることを示さなければならない。実際に計算してみると、

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \chi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (6.29)$$

となり、磁場については不変性が保たれている。電場について計算すると

$$\mathbf{E}' = -\nabla \phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla (\phi' + \dot{\chi}) \quad (6.30)$$

となる。ここで、不変性を保つために $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$ となるには

$$\begin{aligned} \phi &= \phi' + \dot{\chi} \\ \phi' &= \phi - \dot{\chi} \end{aligned} \quad (6.31)$$

とおけば良い。これがベクトルポテンシャルの変換 (6.28) に対する、スカラーポテンシャルの変換となる。以上より、式 (6.26) と式 (6.27) の右辺第 2 項の括弧内がゼロになるとして、 χ を用いて書き直すと、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \nabla \cdot (\mathbf{A}' - \nabla \chi) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\phi' + \dot{\chi}) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \nabla^2 \chi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \dot{\chi}}{\partial t} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$\therefore \nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} = \nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \quad (6.33)$$

となる。この式を満たす χ が存在するとき、式 (6.26) と (6.27) の右辺第 2 項の括弧内はゼロとしてよい。結果として、ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルに対する波動方程式

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (6.34)$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (6.35)$$

が得られる。具体的には、ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルの変換に対して

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

が不変となるための条件を満たせばよい。その条件は、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0$$

であるから、

$$\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \quad (6.36)$$

である。これを満たす χ が存在すれば式 (6.26) と式 (6.27) の右辺第 2 項の括弧内はゼロとおくことができる。ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルに対する変換はゲージ変換と呼ばれる操作であり、式 (6.28) と式 (6.31) で定義したゲージはローレンツゲージと呼ばれる。

ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルは一般に次式で与えられる。ここで、 $(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)$ は遅延時間と呼ばれる量である。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \quad (6.37)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_e(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \quad (6.38)$$

電流密度が

$$\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) = q\mathbf{v}\delta^3(\mathbf{r}') \quad (6.39)$$

と書ける時¹、これを積分すればベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}}{r} \quad (6.40)$$

が得られる²。これを時間で微分すれば電場 $\mathbf{E}$ を与える。

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\dot{\mathbf{r}}}{r} = -\frac{q\ddot{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \quad (6.41)$$

上に示したベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルの式は荷電粒子が非相対論的な加速を行う際に与えられる。一方、荷電粒子が相対論的な加速を受ける際に満たすベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルの式はリエナール・ヴィーヘルトポテンシャルとして知られている。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[\frac{q\mathbf{v}}{1 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})/c} \right]_{\text{ret}} \quad (6.42)$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\frac{q}{1 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})/c} \right]_{\text{ret}} \quad (6.43)$$

$\mathbf{n}$ は荷電粒子から観測者の方向に対する単位ベクトルである。荷電粒子が光速に近い速度で運動する際、自らが放射した電磁波に荷電粒子が追いつくという面白い現象が起こる。

6.2.4 相対論的速度で運動する電子の放射損失

実験室系 S における 4 元加速度ベクトル $\mathbf{A}$ は

$$\mathbf{A} = \gamma \left(c \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial(\gamma \mathbf{v})}{\partial t} \right) \quad (6.44)$$

で与えられる。 γ はローレンツ因子

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6.45)$$

である。 γ と $\gamma \mathbf{v}$ の時間微分をそれぞれ計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \gamma^3 \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$\frac{\partial(\gamma \mathbf{v})}{\partial t} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \gamma^3 \mathbf{v} + \gamma \mathbf{a} \quad (6.47)$$

となる。以上より、4 元加速度ベクトルは

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \gamma^4, \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \gamma^4 \mathbf{v} + \gamma^2 \mathbf{a} \right) \quad (6.48)$$

と表せる。一方で、粒子の静止系（慣性系） S' においては 4 元加速度ベクトル $\mathbf{A}'$ は

$$\mathbf{A}' = (0, \mathbf{a}_0) \quad (6.49)$$

である。4 元加速度ベクトルの大きさはローレンツ不変であるから、

$$\begin{aligned} a_0^2 &= -\frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2}{c^4} \gamma^8 c^2 + \left(\gamma^2 \mathbf{a} + \gamma^4 \mathbf{v} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c} \right) \\ &= \gamma^4 \left\{ -\frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2}{c^2} \gamma^4 + v^2 \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2}{c^4} \right\} + \gamma^4 \left\{ \mathbf{a}^2 + 2\gamma^2 \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2}{c^2} \right\} \\ &= \gamma^4 \left\{ \mathbf{a}^2 + \frac{\gamma^2}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2 \right\} \end{aligned} \quad (6.50)$$

¹誤植か？積分していないのに $\mathbf{r}$ の関数になるわけがない。

²スカラーポテンシャルの項はどこに消えた？電荷が存在しない真空領域を考えているのか。

となる。さらに、 S 系と S' 系においてエネルギー損失率は不変であり、その表式は次式で表せる。

$$-\frac{dE}{dt}\bigg|_S = -\frac{dE}{dt}\bigg|_{S'} = \frac{q^2|\mathbf{a}_0|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (6.51)$$

この式に上で求めた $\mathbf{a}_0$ を代入して計算すると、 S 系におけるエネルギー損失率を知ることができる。ここで、加速度の大きさを次のように一工夫して計算する。電子の加速度を

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\perp + \mathbf{a}_\parallel \quad (6.52)$$

と表すと、加速電子のエネルギー損失率を進行方向に対して水平成分と垂直成分に分離できる。加速度の大きさを取り、 $\mathbf{a}_\perp \cdot \mathbf{a}_\parallel = 0$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}|^2 &= |\mathbf{a}_\perp + \mathbf{a}_\parallel|^2 \\ &= |\mathbf{a}_\perp|^2 + |\mathbf{a}_\parallel|^2 \end{aligned} \quad (6.53)$$

となる。電子の運動方向に対してローレンツ力が垂直に働くことを考慮すれば $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_\perp = 0$ である。これを用いると、

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}_0|^2 &= \mathbf{a}^2 + \frac{\gamma^2}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2 \\ &= |\mathbf{a}_\perp|^2 + |\mathbf{a}_\parallel|^2 + \frac{\gamma^2}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_\perp + \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_\parallel)^2 \\ &= |\mathbf{a}_\perp|^2 + |\mathbf{a}_\parallel|^2 + \frac{\gamma^2}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_\parallel)^2 \\ &= |\mathbf{a}_\perp|^2 + \gamma^2 |\mathbf{a}_\parallel|^2 \end{aligned} \quad (6.54)$$

となる。したがって、加速する荷電粒子のエネルギー損失率は以下のように書ける。

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{rad}} = \frac{q^2\gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3} [|\mathbf{a}_\perp|^2 + \gamma^2 |\mathbf{a}_\parallel|^2] \quad (6.55)$$

6.2.5 パーセバルの理論と加速電子の放射スペクトル

加速された荷電粒子のエネルギー損失率は粒子の加速度に依存する。そこで、以下のように加速度のフーリエ変換を考える。

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{v}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (6.56)$$

$$\dot{\mathbf{v}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{v}}(t) e^{i\omega t} dt \quad (6.57)$$

ここで、パーセバルの等式によれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{\mathbf{v}}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{\mathbf{v}}(\omega)|^2 d\omega \quad (6.58)$$

である。これを用いて加速度の時間依存性を周波数依存性へと変換する。

エネルギー損失率はラーモアの式から

$$\frac{dE}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} |\dot{\mathbf{v}}(t)|^2 dt \quad (6.59)$$

で与えられる。これを時間で積分し、パーセバルの等式を使えば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{dt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} |\dot{\mathbf{v}}(t)|^2 dt \quad (6.60)$$

$$= \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{\mathbf{v}}(\omega)|^2 d\omega \quad (6.61)$$

$$= \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} \int_0^{\infty} |\dot{\mathbf{v}}(\omega)|^2 d\omega \quad (6.62)$$

$$= \int_0^{\infty} I(\omega) d\omega \quad (6.63)$$

と書ける。つまり、

$$I(\omega) = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} |\dot{\mathbf{v}}(\omega)|^2 \quad (6.64)$$

である。この式は単位周波数あたりの放射エネルギーの変化量を表しており、放射のスペクトルを表す。

6.3 制動放射

相対論的な電子によるエネルギー損失率（イオン化損失率）は Bethe-Bloch の式

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{Z^2 e^4 N_e}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \left[\ln \left(\frac{2\gamma^2 m_e v^2}{\bar{I}} \right) - \frac{v^2}{c^2} \right]$$

で表せる。これを物質中で加速された電子による放射と考えた場合、この放射を制動放射 (breaking emission) と呼ぶ。ドイツ語では Bremsstrahlung と呼び、こちらの方が一般的な呼び方とされている³。制動放射には熱的と非熱的な放射の2種類が存在するが、本節では非熱的制動放射を取り扱う。熱的制動放射については、次節以降で扱う。

非熱的制動放射は電子が原子核近傍を通り過ぎる際にクーロン力によって電子の軌道が変化し、電子が加速を受けることによって放射する。 S 系において電子が受ける静電場の表式は 5.3.1 節ですでに与えられ、

電子が受ける水平方向と垂直方向の静電場の表式

$$E_x = -\frac{\gamma Z e v t}{4\pi\epsilon_0 \{b^2 + (\gamma v t)^2\}^{3/2}} \quad (6.65)$$

$$E_z = \frac{\gamma Z e b}{4\pi\epsilon_0 \{b^2 + (\gamma v t)^2\}^{3/2}} \quad (6.66)$$

である。 b は衝突パラメータ（原子核と電子の最近接時の距離）、 Ze は原子核の電荷である。以上を用いて、高エネルギー電子が原子核近傍を通り過ぎる状況を考える。制動放射のスペクトルを得るためには前述の方法と同じ手法を用いる。まず、エネルギー損失率は加速度に依存するため、加速度をフーリエ変換で表す。これを時間積分する。次に、パーセバルの等式によってエネルギーの損失率の時間依存性を周波数依存性に変換する。最後に得た式を衝突パラメータで積分し、スペクトルの表式を得る。言葉だけでは分かりにくいので、具体的に式を用いて説明していく。

電子が受ける加速度は運動方向に対して水平方向と垂直方向に分解できる。電子の運動方向は図 2 のように、進行方向が x 軸が一致している。

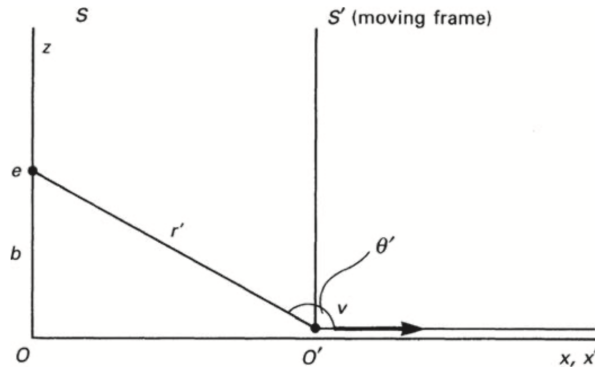


図 2: S 系と S' 系における荷電粒子の運動に対する座標系の取り方。本節では S 系にある電子を電荷 Ze の原子核で置き換えて考えていることに注意。

また、加速度の垂直方向は z 軸と一致している。電子の運動方程式から

$$m_e \mathbf{a} = -e \mathbf{E}$$

³核物理分野では自由-自由放射と呼ばれる。

であるから、加速度はそれぞれ

$$a_{\parallel} = |\dot{v}_x| = -\frac{e}{m_e} E_x = \frac{\gamma Z e^2 v t}{4\pi\epsilon_0 m_e \{b^2 + (\gamma v t)^2\}^{3/2}} \quad (6.67)$$

$$a_{\perp} = |\dot{v}_z| = -\frac{e}{m_e} E_z = \frac{\gamma Z e^2 b}{4\pi\epsilon_0 m_e \{b^2 + (\gamma v t)^2\}^{3/2}} \quad (6.68)$$

と表せる。これをフーリエ変換すると

$$\begin{aligned} v_x(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}_x(t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma Z e^2 v t}{4\pi\epsilon_0 m_e \{b^2 + (\gamma v t)^2\}^{3/2}} e^{i\omega t} dt \end{aligned} \quad (6.69)$$

$$v_z(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}_z(t) e^{i\omega t} dt \quad (6.70)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma Z e^2 b}{4\pi\epsilon_0 m_e \{b^2 + (\gamma v t)^2\}^{3/2}} e^{i\omega t} dt \quad (6.71)$$

となる。ここで、変数

$$x = \frac{\gamma v t}{b} \quad (6.72)$$

$$y = \frac{\omega b}{\gamma v} \quad (6.73)$$

を導入する。これらを用いて加速度の式を変形すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \dot{v}_x(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z e^2 x}{4\pi\epsilon_0 m_e b^2 (1+x^2)^{3/2}} e^{i\omega \frac{bx}{\gamma v}} \frac{b}{\gamma v} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\gamma v b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} e^{i\frac{\omega b}{\gamma v} x} dx \end{aligned} \quad (6.74)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_z(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma Z e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e b^2 (1+x^2)^{3/2}} e^{i\omega \frac{bx}{\gamma v}} \frac{b}{\gamma v} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{1}{v b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} e^{i\frac{\omega b}{\gamma v} x} dx \end{aligned} \quad (6.75)$$

ここで、修正ベッセル関数 $K_0(y)$, $K_1(y)$ を用いて

$$I_1(y) = 2iyK_0(y) \quad (6.76)$$

$$I_2(y) = 2yK_1(y) \quad (6.77)$$

となる量を定義する。これを用いると加速度の表式はさらに簡単となり、

$$\dot{v}_x(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\gamma v b} I_1(y) = a_{\parallel} \quad (6.78)$$

$$\dot{v}_z(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{1}{v b} I_2(y) = a_{\perp} \quad (6.79)$$

と書ける。スペクトルの表式 (6.64) を用いると

$$I(\omega) = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} [a_{\parallel}(\omega)^2 + a_{\perp}^2(\omega)] \quad (6.80)$$

$$= \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e b v} \right)^2 \left[\frac{1}{\gamma^2} I_1^2(y) + I_2^2(y) \right] \quad (6.81)$$

$$= \frac{Z^2 e^6}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v^2} \frac{\omega^2}{\gamma^2 v^2} \left[\frac{1}{\gamma^2} K_0^2 \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right) + K_1^2 \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right) \right] \quad (6.82)$$

と表せる。括弧内の第1項目は荷電粒子の運動方向に沿った加速度、第2項は運動方向に対して垂直方向の加速度成分を表す。スペクトルの表式から分かるように、運動方向に沿った向きの放射は荷電粒子の速度に依存するが、垂直方向への放射には依存しない。つまり、運動方向の放射は $1/\gamma^2$ で減衰するのに対し、荷電粒子の速度が変化しても運動の垂直方向への放射の大きさは常に一定なのである。

さらに、スペクトルの高周波側と低周波側での振る舞いも確認しておく。高周波側は $y = \omega b/\gamma v \gg 1$ であり、低周波側は $y = \omega b/\gamma v \ll 1$ である。それぞれについて修正ベッセル関数の漸近解は

$$y \gg 1 \quad K_0(y) = K_1(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2y}} e^{-y} \quad (6.83)$$

$$y \ll 1 \quad K_0(y) = -\ln y; \quad K_1(y) = \frac{1}{y} \quad (6.84)$$

と表せる。高周波側 ($y \gg 1$) では

$$I(\omega) = \frac{Z^2 e^6}{48\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v^2} \frac{\omega}{\gamma v b} \left(\frac{1}{\gamma^2} + 1 \right) \exp \left(-\omega \cdot \frac{2b}{\gamma v} \right) \quad (6.85)$$

となり、放射のスペクトルに指数関数的なカットオフが生じる。相対論的な衝突の継続時間 τ は

$$\tau = \frac{2b}{\gamma v}$$

であり、周波数に変換すると

$$\nu \approx \frac{1}{\tau} = \frac{\gamma v}{2b}$$

である。角周波数では

$$\omega = 2\pi\nu \approx \frac{\pi\gamma v}{b}$$

となる。オーダー評価をすると、

$$\frac{\omega b}{\gamma v} \approx 1$$

程度であり、この周波数以上においては放射のパワーは格段に減衰する。これがカットオフ周波数である。

一方で、低周波側 ($y \ll 1$) におけるスペクトルの表式は

$$I(\omega) = \frac{Z^2 e^6}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v^2} \frac{1}{b^2} \left[1 + \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right)^2 \ln^2 \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right) \right] \quad (6.86)$$

となる。低周波極限 $y = \omega b/\gamma v \ll 1$ の下では第2項を無視でき、

$$I(\omega) = \frac{Z^2 e^6}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 b^2 v^2} = K \quad (6.87)$$

となり、周波数に依存しない定数 K となる。低周波側では $\gamma \gg 1$ であるから、荷電粒子の加速度の水平成分は $1/\gamma^2$ に比例するためほぼ無視できる。一方で、垂直成分が大きく寄与する。制動放射における運動方向と垂直方向のスペクトルをそれぞれ図3に示す。

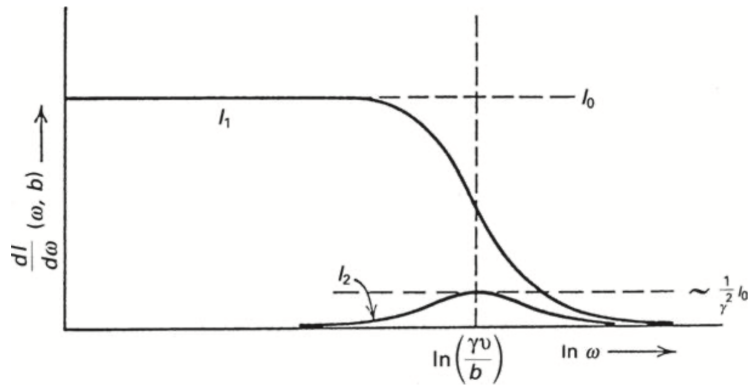


図3: 運動方向に対して水平方向 (I_2) と垂直方向 (I_1) の制動放射のスペクトル。低周波極限ではスペクトルは ω に依存しない一定値を取る。一方、高周波側では指数関数的なカットオフを生じる。カットオフ周波数は衝突の継続時間から評価できる。

最後にスペクトルを衝突パラメータで積分すれば、制動放射のスペクトルの表式を求めることができる。ここでは低周波極限を取った際に限って計算する。全てのパラメータは S 系での観測値であるから、これらを電子の静止系 S' 系での値に変換することに注意する。 S' 系における衝突パラメータの微小間隔を db' としたとき、微小散乱断面積は $2\pi b' db'$ で表せる。また、 S' 系での粒子数密度を N' とすると、この量は S 系における粒子数 N にローレンツゲージ因子 γ をかけたものとして表せる。以上より、 S' 系における単位時間あたりに散乱される粒子数は粒子の速さを v とすれば

$$2\pi b' db' \times N\gamma v$$

で表せる。1 粒子あたりの放射スペクトルは K で表せるので、放射のスペクトルは $2\pi b' db' \times N\gamma v K$ を衝突パラメータの上限 $b'_{\max}$ と下限 $b'_{\min}$ で積分することによって求められる。よって、

$$I(\omega') = \int_{b'_{\min}}^{b'_{\max}} 2\pi b' \gamma N v K db' = \frac{Z^2 e^6 \gamma N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \frac{1}{v} \ln \left(\frac{b'_{\max}}{b'_{\min}} \right) \quad (6.88)$$

となる。

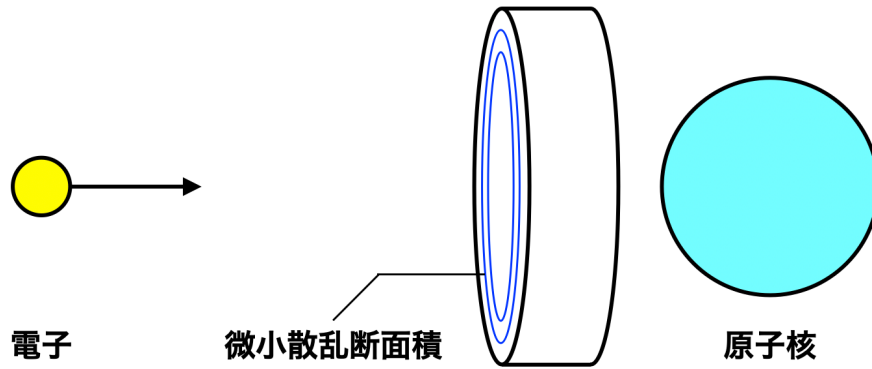


図 4: 電子と原子核の衝突イメージ。